2019～2020 年度河南省高三阶段性考试(三)
数学参考答案(理科)

1. D 【解析】本题考查集合交集与补集的混合运算,考查运算求解能力.
因为 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{3,4,5\}$,所以 $\complement_U A=\{0,5,6\}$,$(\complement_U A)\cap B=\{5\}$.

2. A 【解析】本题考查复数的四则运算和概念,考查运算求解能力.
$z=\dfrac{2i^3}{1+i}=\dfrac{-2i}{1+i}=\dfrac{-2-2i}{2}=-1-i$.

3. C 【解析】本题考查等比数列的通项公式,考查运算求解能力.
由 $S_{n+1}=a_1+qS_n$,得 $S_7-2S_6=a_1=1$,所以 $a_5=2^4=16$,所以 $a_1+a_5=17$.

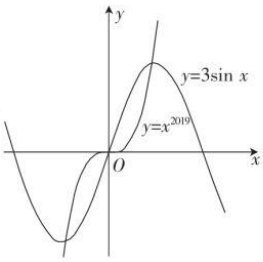
4. B 【解析】本题考查平面向量的坐标运算,考查运算求解能力.
因为 $2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=(3\lambda+4,4)$,$\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}=(-\lambda-3,-3)$,且 $(2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})/\!/(\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n})$,
所以 $(-3)\cdot(3\lambda+4)-4\cdot(-\lambda-3)=0$,$\lambda=0$.

5. C 【解析】本题考查三角函数的二倍角公式,考查运算求解能力.
由 $\sin 2\alpha=\cos\alpha$,则 $2\sin\alpha\cos\alpha=\cos\alpha$,因为 $\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,故 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$,所以 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}$.

6. A 【解析】本题考查充分条件、必要条件和三角函数,考查数形结合和运算求解能力.
必要性:设 $f(x)=a\sin x+1$,当 $a>0$ 时,$f(x)\in[1-a,1+a]$,所以 $1-a<0$,即 $a>1$;
当 $a<0$ 时,$f(x)\in[1+a,1-a]$,所以 $1+a<0$,即 $a<-1$. 故 $a>1$ 或 $a<-1$.
充分性:取 $x_0=\dfrac{\pi}{2}$,当 $a<-1$ 时,$a\sin x_0+1<0$ 成立.

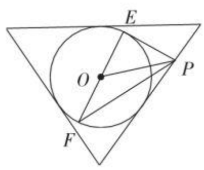
7. D 【解析】本题考查三角函数的图象、性质以及平移变换,考查运算求解能力.
由函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+1(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象知 $1+\sin\varphi=\dfrac{3}{2}$,即 $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$. 因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$,所以 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})+1$. 因为点 $(\dfrac{\pi}{6},2)$ 在 $f(x)$ 的图象上,所以 $\sin(\dfrac{\pi}{6}\omega+\dfrac{\pi}{6})=1$,所以 $\dfrac{\pi}{6}\omega+\dfrac{\pi}{6}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $\omega>0$,结合图象可知,$\omega=2$,所以 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+1$,将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象,则 $g(x)=\sin[2(x-\dfrac{\pi}{4})+\dfrac{\pi}{6}]+1=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})+1$.

8. B 【解析】本题考查函数的奇偶性与零点,考查数形结合的数学思想以及推理论证能力.
因为函数 $f(x)=x^{2019}+a-1-3\sin x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,
所以 $f(0)=a-1=0$,即 $a=1$,所以 $f(x)=x^{2019}-3\sin x$,结合函数 $y=x^{2019}$ 与 $y=3\sin x$ 的图象可知,$f(x)$ 的零点的个数为 3.



9. B 【解析】本题考查基本不等式的性质、一元二次不等式的解法,考查推理能力与计算能力.
$\because a,b\in(0,+\infty)$,$\therefore(\dfrac{a+b}{2})^2\geqslant ab$,可得 $\dfrac{1}{ab}\geqslant\dfrac{4}{(a+b)^2}$,当且仅当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 或 $a=b=4$ 时取等号. $\because 1+\dfrac{2}{ab}=\dfrac{9}{a+b}$,$\therefore\dfrac{2}{ab}=\dfrac{9}{a+b}-1\geqslant\dfrac{8}{(a+b)^2}$,化为 $(a+b)^2-9(a+b)+8\leqslant 0$,解得 $1\leqslant a+b\leqslant 8$,则 $a+b$ 的取值范围是 $[1,8]$.

10. D 【解析】本题考查平面向量的数量积公式以及三角形内切圆的应用,考查化归与转化的数学思想以及运算求解能力.
正△ABC 的边长为 1,则高为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,内切圆半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$,如图所示,$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OP})=|\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{OE}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2-\dfrac{1}{12}$,当点 P 为△ABC 的顶点时,$|\overrightarrow{OP}|^2$ 取得最大值 $\dfrac{1}{3}$,所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$.



11. B 【解析】本题考查指数与对数的转换以及函数与方程的数学思想,考查抽象概况能力.

由 $6^x>5^x$,解得 $x>0$,令 $t=\log_6(4^x+5^x)=\log_4(6^x-5^x)$,所以 $\begin{cases}4^x+5^x=6^t,\\6^x-5^x=4^t,\end{cases}$ 两式相加得 $4^x+6^x=4^t+6^t$,又函数 $y=4^x+6^x$ 单调递增,故 $x=t$,则 $4^x+5^x=6^x$,即 $(\frac{2}{3})^x+(\frac{5}{6})^x=1$. 令 $g(x)=(\frac{2}{3})^x+(\frac{5}{6})^x$,且 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,又 $g(2)>1$,$g(3)<1$,所以存在唯一 $x_0\in(2,3)$,使得 $g(x_0)=1$. 所以方程 $\log_6(4^x+5^x)=\log_4(6^x-5^x)$ 只有唯一实数解.

12. C 【解析】本题考查等差数列的定义以及前 n 项和,考查运算求解能力,分类讨论的数学思想.

由题意知 $a_{2k}=a_{2k-1}+1$,$a_{2k+1}=2a_{2k}+1$,所以 $a_{2k}=a_{2k-1}+1$,$a_{2k+1}=2(a_{2k-1}+1)+1=2a_{2k-1}+3$,

即 $a_{2k+1}+3=2(a_{2k-1}+3)$. 又 $a_1+3=4$,所以数列 $\{a_{2k-1}+3\}$ 是以 4 为首项,2 为公比的等比数列,

所以 $a_{2k-1}=4\cdot 2^{k-1}-3$,$a_{2k}=4\cdot 2^{k-1}-2$,

所以 $S_{奇}=a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}=\frac{4(1-2^k)}{1-2}-3k=2^{k+2}-4-3k$,

$S_{偶}=a_2+a_4+\cdots+a_{2k}=2^{k+2}-4-2k$,所以 $S_{2k}=S_{奇}+S_{偶}=2^{k+3}-8-5k$.

当 $k=8$ 时,$S_{16}=2000<2020$. 又 $a_{17}=1021$,所以 $S_{17}=3021>2020$,故正整数 m 的最小值为 17.

13. 10 【解析】本题考查线性规划问题,考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.

画出可行域(图略)知,当 $l:x+3y=0$ 平移到过点 $(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ 时,$z_{\max}=10$.

14. -1 【解析】本题考查三角恒等变换的知识,考查运算求解能力.

因为 α 为第二象限角,所以 $\sin\alpha>0$,$\cos\alpha<0$,

所以 $\cos\alpha\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}=\cos\alpha\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}=\cos\alpha\cdot\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=-1-\sin\alpha$,

$\sin^2\alpha\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\alpha}}=\sin^2\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha}=\sin\alpha$,所以 $\cos\alpha\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sin^2\alpha\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\alpha}}=-1$.

15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】本题考查正弦定理以及三角恒等变换,考查运算求解能力.

由正弦定理可知,$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\sin C\cos A$,易得 $c\cos A=c\sin A$,$A=\frac{\pi}{4}$. 又 a,b,c 成等比数列,所以 $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$,$\frac{b\sin B}{c}=\frac{a\sin B}{b}=\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. $(-\infty,\mathrm{e}]$ 【解析】本题考查导数的几何意义以及导数的应用,考查函数与方程、化归与转化的数学思想.

设 $f(x)=\mathrm{e}^x$,切点为 (x_0,e^{x_0}),

$f'(x)=\mathrm{e}^x$,所以 $k=\mathrm{e}^{x_0}$,$b=\mathrm{e}^{x_0}-kx_0=\mathrm{e}^{x_0}(1-x_0)$,

所以 $k+b=\mathrm{e}^{x_0}+\mathrm{e}^{x_0}(1-x_0)=\mathrm{e}^{x_0}(2-x_0)$.

令 $g(x)=\mathrm{e}^x(2-x)$,$g'(x)=\mathrm{e}^x(2-x)-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(1-x)$,

当 $x\in(-\infty,1)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减.

又 $g(1)=\mathrm{e}$,所以 $k+b$ 的取值范围是 $(-\infty,\mathrm{e}]$.

17. 解:(1)因为 $a_4+a_5=6a_3$,所以 $a_1q^3+a_1q^4=6a_1q^2$,即 $q^2+q-6=0$,

解得 $q=2$ 或 $q=-3$(舍去). ········· 2 分

所以 $S_5=\frac{a_1(1-2^5)}{1-2}=31a_1=62$,$a_1=2$, ········· 4 分

所以 $a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$. ········· 5 分

(2)因为 $b_n=\frac{1}{(\log_2 a_n)(\log_2 a_{n+2})}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$, ········· 6 分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})]$ ········· 8 分

$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{n^2+3n+2})=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2n^2+6n+4}$. ········· 10 分

18. 解:(1)函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数. ········· 1 分

证明如下:

任取 $x>0$,则 $-x<0$,

所以 $f(-x)=1-4^x=-(4^x-1)=-f(x)$; ········· 3 分

再任取 $x<0$,则 $-x>0$,

所以 $f(-x)=4^{-x}-1=-(1-4^{-x})=-f(x)$；
又当 $x=0$ 时，$-x=0$，
所以 $f(-x)=0=-0=-f(x)$. ………………………………………………………… 5 分
故 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数. ………………………………………………… 6 分
(2)当 $x>0$ 时，$f(x)=4^x-1$ 是增函数，
所以 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数. ……………………………………………… 7 分
又 $f(-\frac{1}{2})=-1$，$f(1)=3$， ……………………………………………………………… 9 分
所以 $-\frac{1}{2}<\log_4 x\leqslant 1$，所以 $\frac{1}{2}<x\leqslant 4$， ………………………………………… 11 分
所以不等式 $-1<f(\log_4 x)\leqslant 3$ 的解集为 $(\frac{1}{2},4]$. ………………………………… 12 分

19. 解：(1) $f(x)=\frac{1}{2}[1-\cos(2x-\frac{\pi}{2})]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x$， ………………………… 1 分
$f(\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{1}{6}$，则 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，又 $\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，故 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. ………………… 2 分
$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=4\sqrt{5}$， ……………………………………………………… 4 分
$\tan(2\alpha+\beta)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\beta}{1-\tan 2\alpha\tan\beta}=\frac{5\sqrt{5}}{1-20}=-\frac{5\sqrt{5}}{19}$. ………………………………… 6 分
(2) $g(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$， ………………………………………………………………… 7 分
由题意可知 $|PQ|=|f(t)-g(t)|=|\frac{1}{2}-\sin(2t+\frac{\pi}{3})|$， ……………………………… 9 分
当 $\sin(2t+\frac{\pi}{3})=-1$ 时，$|PQ|$ 取到最大值 $\frac{3}{2}$. …………………………………………… 11 分
当 $|PQ|$ 取到最大值时，$2t+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $t\in[0,\pi]$，所以 $t=\frac{7\pi}{12}$. ………………… 12 分

20. 解：(1)在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=-\frac{1}{4}$，
所以 $\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{15}}{4}$. ………………………………………………………… 2 分
因为角 D 与角 B 互补，
所以 $\sin\angle ADC=\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos\angle ADC=-\cos\angle ABC=\frac{1}{4}$. ……………………… 3 分
又 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}$，
所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\cos\angle ADC=\frac{3}{2}$，即 $|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{CD}|=6$， ………………… 5 分
所以 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\sin\angle ADC=\frac{3\sqrt{15}}{4}$. ……………………………… 6 分
(2)在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC$，
所以 $AD^2+CD^2=AC^2+2AD\cdot CD\cos\angle ADC=12$， …………………………………… 8 分
所以 $AD+CD=2\sqrt{6}$， …………………………………………………………………… 10 分
所以 $\triangle ACD$ 的周长为 $AD+CD+AC=2\sqrt{6}+3$. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由题意知，$f'(x)=x(x^2+4ax+1)$，显然 $x=0$ 不是方程 $x^2+4ax+1=0$ 的根.
为使 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处有极值，必须 $x^2+4ax+1\geqslant 0$ 恒成立，即 $\Delta=4(4a^2-1)\leqslant 0$，
解不等式，得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$. 这时 $f(0)=1$ 是唯一极值，………………………………… 3 分
因此满足条件的 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. …………………………………………… 5 分
(2)当 p 是真命题时，记 $g(x)=x^3-ax$，则 $g'(x)=3x^2-a$.
当 $a>1$ 时，要使得 $y=\log_a(x^3-ax)$ 是增函数，则需有 $g'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in(-\frac{1}{2},0)$ 恒成立，

所以 $a\leqslant 0$，与 $a>1$ 矛盾； ………………………………………………………………………… 7 分

当 $0<a<1$ 时，要使得 $y=\log_a(x^3-ax)$ 是增函数，则需有 $g'(x)\leqslant 0$ 对 $x\in(-\frac{1}{2},0)$ 恒成立，

所以 $a\geqslant 3\cdot(-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$，所以 $\frac{3}{4}\leqslant a<1$.

记当 p 是真命题时 a 的取值集合为 A，则 $A=\{a|\frac{3}{4}\leqslant a<1\}$； ……………………………… 9 分

记当 $\neg q$ 是真命题时 a 的取值集合为 B，则 $B=\{a|a<-\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{1}{2}\}$. ……………………… 10 分

因为 $p\vee(\neg q)$ 是真命题，

所以 a 的取值范围是 $A\cup B=\{a|a<-\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{1}{2}\}$. ……………………………………… 12 分

22. 解：(1) $g(x)$ 的定义域为 $(0,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},+\infty)$，且 $g'(x)=\frac{3+2x\ln x}{x(3-2x)^2}$. ……………………… 1 分

令 $h(x)=3+2x\ln x$，则 $h'(x)=2(1+\ln x)$， ………………………………………………………… 2 分

所以当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 是减函数；

当 $x\in(\frac{1}{e},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 是增函数.

所以 $h(x)_{\min}=h(\frac{1}{e})=3-\frac{2}{e}>0$， ………………………………………………………… 3 分

所以在 $(0,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},+\infty)$ 上，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(0,\frac{3}{2})$，$(\frac{3}{2},+\infty)$ 上是增函数. ………………………………………… 4 分

(2) 由题意知 $f'(x)=1+\ln x-a+2a(x-1)=1+\ln x+2ax-3a$.

令 $k(x)=1+\ln x+2ax-3a$，因为 $a>0$，

所以 $k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f'(\frac{1}{e})=k(\frac{1}{e})=1+\ln\frac{1}{e}+(\frac{2}{e}-3)a=(\frac{2}{e}-3)a<0$，

$f'(e)=k(e)=1+\ln e+(2e-3)a=2+(2e-3)a>0$，

所以存在实数 $x_0\in(\frac{1}{e},e)$，使得 $k(x_0)=0$. ……………………………………………………… 6 分

在 $(0,x_0)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 是减函数；在 $(x_0,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 是增函数.

所以 $f(x)$ 的最小值是 $f(x_0)$，其中 x_0 满足 $f'(x_0)=0$，即 $1+\ln x_0+2ax_0-3a=0$，

所以 $f(x_0)=x_0\ln x_0-ax_0+1+a(x_0-1)^2=x_0(3a-1-2ax_0)-ax_0+1+a(x_0-1)^2$

$=(1-x_0)(a+ax_0+1)$. …………………………………………………………………………… 7 分

①当 $x_0=1$，即 $a=1$ 时，$f(x)$ 的最小值为 0，此时 $f(x)$ 有一个零点； ……………………………… 8 分

②当 $\frac{1}{e}<x_0<1$ 时，$f(x_0)>0$，$f(x)$ 没有零点，此时 $a=\frac{1+\ln x_0}{3-2x_0}$，

由 $g(x)$ 的单调性，可得 $0<a<1$； ……………………………………………………………… 10 分

③当 $1<x_0<e$ 时，$f(x_0)<0$，$f(x)$ 有两个零点.

又 $a>0$，所以 $1<x_0<\frac{3}{2}$，

由 $g(x)$ 的单调性，可得 $a>1$.

综上所述，当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 没有零点；

当 $a=1$ 时，$f(x)$ 只有 1 个零点；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点. ………………………………………………………………… 12 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：zizzsw。

微信扫一扫，快速关注