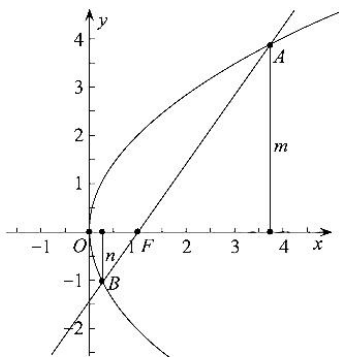


## 菁师联盟 2023 届 12 月质量监测考试

### 理科数学参考答案

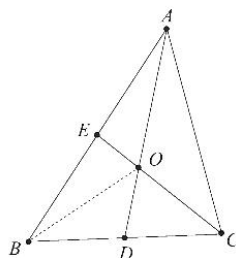
1. B 解析: 因为集合  $A = \{x | |x - 1| < 1\} = (0, 2)$ ,  $B = \{x | x^2 + x \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ ,  
 $A \cap B = (0, 2)$ ,  $(C_U A) \cup (C_U B) = C_U(A \cap B) = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ .
2. A 解析: 因为  $z \cdot (3 + 2i) = -1 + 3i$ , 所以  $z = \frac{-1 + 3i}{3 + 2i} = \frac{(-1 + 3i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{3}{13} + \frac{11}{13}i$ , 则  $z$  的虚部为  $\frac{11}{13}$ .
3. C 解析: 如图, 2020 年的货物进出口总额为  $142936 + 179279 = 322215$  亿元, 故选项 A 正确; 2020 年的货物进出口顺差为  $179279 - 142936 = 36343$  亿元, 故选项 B 正确; 2020 年的货物进口总额为 142936 亿元, 相对于 2019 的货物进口总额 143254 亿元下降了, 故选项 C 错误; 2017—2021 年, 货物出口总额逐年上升, 故选项 D 正确.
4. C 解析: 由  $PH = -\lg[H^+] = -\lg(6 \times 10^{-8}) = 8 - \lg 6 \approx 8 - 0.78 = 7.22$ .
5. A 解析: 因为直线  $l: \sqrt{2}x - y - \sqrt{2} = 0$  过抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点  $F(1, 0)$ , 且与  $C$  交于  $A, B$  两点, 设直线  $l$  的倾斜角为  $\theta$ , 则  $\tan \theta = \sqrt{2}$ , 所以  $|AF| = \frac{2}{1 - \cos \theta}$ ,  $|BF| = \frac{2}{1 + \cos \theta}$ , 则  $m = |AF| \sin \theta = \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta}$ ,  $n = |BF| \sin \theta = \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos \theta}$ , 所以,  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1 - \cos \theta}{2 \sin \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .



6. A 解析: 因为单位向量  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  的夹角为  $\theta$ , 且向量  $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  与  $\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$  的夹角为  $120^\circ$ ,  
 所以  $\cos 120^\circ = \frac{(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2)}{\|2\vec{e}_1 + \vec{e}_2\| \|\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2\|} = \frac{-1 - 5 \cos \theta}{\sqrt{5 + 4 \cos \theta} \sqrt{10 - 6 \cos \theta}} = -\frac{1}{2}$ ,  $62 \cos^2 \theta + 15 \cos \theta - 23 = 0$ ,  $(2 \cos \theta - 1)(31 \cos \theta + 23) = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$  或  $\cos \theta = -\frac{23}{31}$  (舍).
7. C 解析: 如图, 连接  $BO$ ,  $\because a = 3, b = 4, c = \sqrt{13}$ ,  $\therefore \cos \angle ACB = \frac{3^2 + 4^2 - \sqrt{13}^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ACB = \frac{\pi}{3}$ .

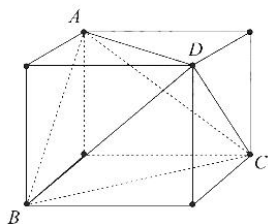
因为点  $D, E$  分别是边  $BC, BA$  的中点, 且  $AD, CE$  交于点  $O$ , 所以  $O$  为  $\triangle ABC$  的重心, 则  $\frac{OE}{CE} = \frac{1}{3}$ , 则  $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{1}{3}$ , 又因为  $\frac{S_{\triangle EOB}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{1}{2}$ , 所以  $S_{\triangle EOB} = \frac{1}{6} S_{\triangle ACB}$ , 同理,  $S_{\triangle DOB} = \frac{1}{6} S_{\triangle ACB}$ ,

则  $S_{BDOE} = \frac{1}{6} S_{\triangle ACB} + \frac{1}{6} S_{\triangle ACB} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACB} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ , 即四边形  $BDOE$  的面积为  $\sqrt{3}$ .



8. B 解析: 由题意得该四面体  $ABCD$  的直观图如图所示, 图中长方体的棱长分别为  $2, 1, \sqrt{3}$ , 则四面体  $ABCD$  的体积为

$$V = 2 \times 1 \times \sqrt{3} - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



9. C 解析: 因为函数  $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ , ( $\omega > 0, -\pi < \varphi < 0$ ),  $f(0) = \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6}$ ,

$$\text{所以 } f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}), f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow \omega x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\frac{2}{3}\pi + k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}.$$

所以

$$\begin{cases} \frac{\frac{2}{3}\pi + 49\pi}{\omega} \leq 100\pi \\ \frac{\frac{2}{3}\pi - 51\pi}{\omega} < -100\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega \geq \frac{149}{300} \\ \omega < \frac{151}{300} \end{cases} \Rightarrow 300 \leq \omega < 300, \text{ 所以 } \omega \text{ 的取值范围是 } \left[ \frac{149}{300}, \frac{151}{300} \right), \text{ 故}$$

选 C.

10. C 解析: 第三次摸到红球包括四种情况:

①第一次摸到红球, 第二次摸到红球, 第三次摸到红球, 概率为  $P_1 = \frac{3 \times 2 \times 1}{9 \times 8 \times 7} = \frac{1}{84}$ ;

②第一次摸到红球, 第二次摸到黑球, 第三次摸到红球, 概率为  $P_2 = \frac{3 \times 6 \times 2}{9 \times 8 \times 7} = \frac{6}{84}$ ;

③第一次摸到黑球, 第二次摸到红球, 第三次摸到红球, 概率为  $P_3 = \frac{6 \times 3 \times 2}{9 \times 8 \times 7} = \frac{6}{84}$ ;

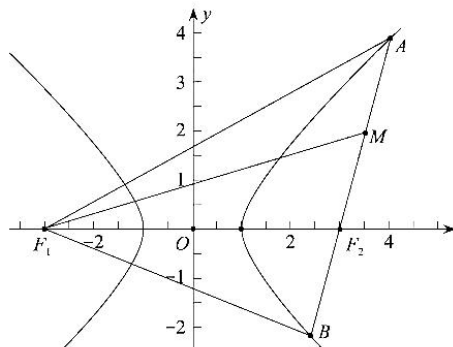
④第一次摸到黑球, 第二次摸到黑球, 第三次摸到红球, 概率为  $P_4 = \frac{6 \times 5 \times 3}{9 \times 8 \times 7} = \frac{15}{84}$ ;

所以第三次摸到红球的概率为  $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{1}{84} + \frac{6}{84} + \frac{6}{84} + \frac{15}{84} = \frac{28}{84} = \frac{1}{3}$ , 故选 C.

11. B 解析: 设  $|BF_2| = t$ , 因为  $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$ , 所以  $|AF_2| = 2t$ , 由  $|BF_1| - |BF_2| = 2a \Rightarrow |BF_1| = t + 2a$ , 由  $|AF_1| - |AF_2| = 2a \Rightarrow |AF_1| = 2t + 2a$ . 设  $|F_1F_2| = 2c, c^2 = a^2 + b^2$ , 因为  $\angle ABF_1 = 60^\circ$ , 在  $\triangle BF_1F_2$  中,  $\cos \angle F_1BF_2 = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{(t+2a)^2 + t^2 - (2c)^2}{2 \times (t+2a) \times t} \Rightarrow t^2 + 2at + 4a^2 - 4c^2 = 0 \textcircled{1}$ ;

在  $\triangle BF_1A$  中,  $\cos \angle F_1BA = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{(t+2a)^2 + (3t)^2 - (2t+2a)^2}{2 \times (t+2a) \times 3t} \Rightarrow 3t^2 - 10at = 0 \Rightarrow t =$

$\frac{10}{3}a$ , 代入①式得  $c = \frac{7}{3}a$ . 点  $M$  为线段  $AF_2$  的中点, 所以  $|AM| = |MF_2| = \frac{10}{3}a$ , 因为  $\cos \angle AMF_1 + \cos \angle F_2MF_1 = 0$ , 所以  $\frac{\left(\frac{10}{3}a\right)^2 + |F_1M|^2 - \left(\frac{26}{3}a\right)^2}{2 \times \frac{10}{3}a \times |F_1M|} + \frac{\left(\frac{10}{3}a\right)^2 + |F_1M|^2 - \left(\frac{14}{3}a\right)^2}{2 \times \frac{10}{3}a \times |F_1M|} = 0 \Rightarrow |F_1M| = \frac{4\sqrt{21}}{3}a$ , 又因为  $|F_1F_2| = \frac{14}{3}a$ , 所以  $\frac{|F_1M|}{|F_1F_2|} = \frac{\frac{4\sqrt{21}}{3}a}{\frac{14}{3}a} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ , 故选 B.

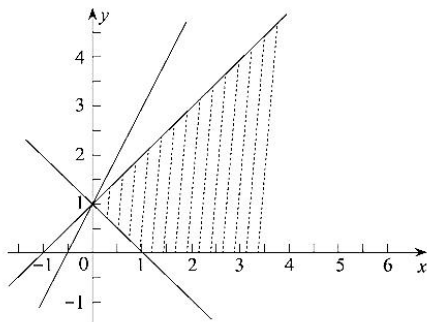


12. B 解析:  $4a = 4 \log_6 4 = \log_6 4^4 > \log_6 6^3 = 3$ ,  $4b = 4 \log_5 5 = \log_5 5^4 < \log_5 9^3 = 3$ ,  
 $4c = 4 \log_{12} 8 = \log_{12} 8^4 > \log_{12} 12^3 = 3$ , 所以  $b < a$ ,  $b < c$ .

$5a = 5 \log_6 4 = \log_6 4^5 < \log_6 6^4 = 4$ ,  $5c = 5 \log_{12} 8 = \log_{12} 8^5 > \log_{12} 12^4 = 4$ , 所以  $a < c$ .

综上,  $b < a < c$ , 故选 B.

13. 1 解析: 如图所示,  $x, y$  满足的平面区域如图中阴影所示, 令  $z = y - 2x$ , 即直线  $y = 2x + z$  经过点  $(0, 1)$  时,  $z$  最大, 且  $z_{\max} = 1$ , 即  $y - 2x$  的最大值为 1.



14. -44 解析:  $(x^3 - x + 1)^6$  就是 6 个  $(x^3 - x + 1)$  相乘,

0 个  $x^3$ , 6 个  $-x$ , 即  $(-1)^6 x^6 = x^6$ ;

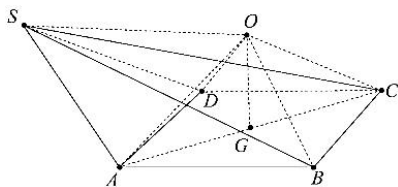
1 个  $x^3$ , 3 个  $-x$ , 即  $C_6^1 x^3 \cdot C_5^3 (-x)^3 = -60x^6$ ;

2 个  $x^3$ , 0 个  $-x$ , 即  $C_6^2 (x^3)^2 = 15x^6$ ;

所以  $x^6$  的系数为:  $1 - 60 + 15 = -44$ .

15.  $18\pi$  解析: 如图, 四棱锥  $S-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为矩形, 平面  $SAC \perp$  平面  $ABCD$ , 所以四棱锥  $S-ABCD$  外接球的球心是  $\triangle ABC$  外接圆的圆心  $O$ , 因为  $\cos \angle SAC = -\frac{1}{3}$ , 所以  $\sin \angle SAC =$

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ , 则  $\frac{SC}{\sin \angle SAC} = \frac{4}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2R \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 18\pi$ .



16. ①③④ 解析: 因为  $f(x) = e^{\cos x} - \frac{1}{e^{\cos x}}$ ,  $f(-x) = e^{\cos(-x)} - \frac{1}{e^{\cos(-x)}} = e^{\cos x} - \frac{1}{e^{\cos x}} = f(x)$ , 所以  $f(x)$  为偶函数, 图象关于  $y$  轴对称, 故①正确;  $f(2\pi - x) = e^{\cos(2\pi - x)} - \frac{1}{e^{\cos(2\pi - x)}} = e^{\cos x} - \frac{1}{e^{\cos x}} = f(x)$ , 所以  $f(x)$  的图象关于  $x = \pi$  对称, 故②错误; 令  $t = \cos x \in [-1, 1]$ , 则  $y = e^t - \frac{1}{e^t}$  在  $t \in [-1, 1]$  上单调递增, 所以  $y_{\min} = \frac{1}{e} - e$ , 即  $f(x)$  的最小值是  $\frac{1}{e} - e$ , 故③正确; 令  $t = \cos x$  在  $[0, \pi]$  上单调递减,  $y = e^t - \frac{1}{e^t}$  在  $t \in [-1, 1]$  上单调递增, 所以  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上单调递减, 故④正确; 则所有真命题的序号是①③④.

17. (12分) 解: (1) 因为  $a_{n+1} = 2a_n + 3n - 3$ , 所以  $a_{n+1} + 3(n+1) = 2a_n + 6n = 2(a_n + 3n)$ , 又因为  $a_1 = -2$ , 则  $a_1 + 3 = 1 \neq 0$ ,  $\frac{a_{n+1} + 3(n+1)}{a_n + 3n} = 2$ , 所以数列  $\{a_n + 3n\}$  为等比数列; ..... 4分  
(2) 由 (1) 得  $a_n + 3n = (a_1 + 3) \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$ , 则  $a_n = 2^{n-1} - 3n$ ,  
 $S_n = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - \frac{3n(n+1)}{2} = 2^n - 1 - \frac{3n(n+1)}{2}$ , ..... 6分  
则  $T_n = S_n + \frac{3}{2}n^2 - \frac{13}{2}n = 2^n - 1 - \frac{3n(n+1)}{2} + \frac{3}{2}n^2 - \frac{13}{2}n = 2^n - 1 - 8n$ ,  
当  $n \geq 2$  时,  $T_n - T_{n-1} = (2^n - 1 - 8n) - [2^{n-1} - 1 - 8(n-1)] = 2^{n-1} - 8$ , ..... 8分  
所以当  $n \geq 5$  且  $n \in \mathbb{N}^+$  时,  $T_n - T_{n-1} = 2^{n-1} - 8 > 0$ , 即  $T_n > T_{n-1}$ , 则  $T_4 < T_5 < T_6 < \dots$ ;  
当  $n = 4$  时,  $T_4 - T_3 = 2^3 - 8 = 0$ , 即  $T_4 = T_3$ ;  
当  $2 \leq n \leq 3$  且  $n \in \mathbb{N}^+$  时,  $T_n - T_{n-1} = 2^{n-1} - 8 < 0$ , 即  $T_n < T_{n-1}$ , 则  $T_3 < T_2 < T_1$ .  
综上,  $(T_n)_{\min} = T_3 = T_4 = -17$ , 即  $T_n$  的最小值为  $-17$ . ..... 12分

18. (12分) 解: (1) 因为甲在 50 米, 100 米, 150 米处击中目标的概率分别为  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ , 所以甲命中目标的概率为  $P_1 = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$ ; ..... 2分  
因为乙在 50 米, 100 米, 150 米处击中目标的概率分别为  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ , 所以乙命中目标的概率为  $P_2 = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$ . ..... 4分  
则甲, 乙两人中恰有一人命中目标的概率为  $P = \frac{13}{18} \times \left(1 - \frac{7}{10}\right) + \left(1 - \frac{13}{18}\right) \times \frac{7}{10} = \frac{37}{90}$ . ..... 6分  
(2)  $X$  的取值为: 0, 2, 4.  
 $P(X=0) = \left(1 - \frac{13}{18}\right) \times \left(1 - \frac{7}{10}\right) = \frac{1}{12}$ ;  $P(X=2) = \frac{13}{18} \times \left(1 - \frac{7}{10}\right) + \left(1 - \frac{13}{18}\right) \times \frac{7}{10} = \frac{37}{90}$ ;  
 $P(X=4) = \frac{13}{18} \times \frac{7}{10} = \frac{91}{180}$ . ..... 9分  
则  $X$  的分布列为:

$X$	0	2	4
$P$	$\frac{1}{12}$	$\frac{37}{90}$	$\frac{91}{180}$

则  $EX = 0 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{37}{90} + 4 \times \frac{91}{180} = \frac{128}{45}$ . ..... 12分

19. (12分) 解: (1) 如图, 取  $AC$  的中点  $E$ , 连接  $A_1E, BE$ ,

因为  $AA_1 = BA_1 = CA_1 = AC = 2$ , 所以  $A_1E \perp AC$ ,

$$A_1E = \sqrt{AA_1^2 - AE^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

又因为  $\angle ABC = 90^\circ$ , 所以  $BE = \frac{1}{2}AC = 1$ .

所以  $A_1E^2 + BE^2 = A_1B^2$ , 则  $A_1E \perp BE$ ,

又因为  $AC \cap BE = E$ , 所以  $A_1E \perp$  平面  $ABC$ , 所以直线  $A_1B$  与平面  $ABC$  所成角为  $\angle A_1BE$ , 在直角  $\triangle A_1BE$  中,  $\tan \angle A_1BE = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle A_1BE = 60^\circ$ , 则直线  $A_1B$  与平面  $ABC$  所成的角为  $60^\circ$ .

..... 5分

(2) 以  $B$  为坐标原点,  $\overrightarrow{BA}$  的方向为  $x$  轴正方向,  $\overrightarrow{BC}$  的方向为  $y$  轴正方向, 垂直于平面  $ABC$  向上的方向为  $z$  轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系. 因为  $AC = 2, AB = 1, \angle ABC = 90^\circ$ , 所以  $BC = \sqrt{3}$ , 由 (1) 得,  $B(0, 0, 0), C(\sqrt{3}, 0, 0), A(0, 1, 0), A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$ ,

则  $\overrightarrow{BC} = (\sqrt{3}, 0, 0), \overrightarrow{BA} = (0, 1, 0), \overrightarrow{BA_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$ . ..... 6分

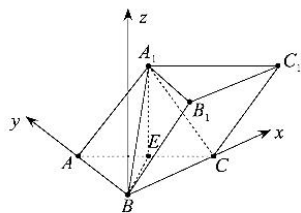
设平面  $AA_1B$  的法向量为  $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}_1 = y_1 = 0 \\ \overrightarrow{BA_1} \cdot \vec{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 = (2\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}).$$

..... 8分

设平面  $CA_1B$  的法向量为  $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} \cdot \vec{n}_2 = \sqrt{3}x_2 = 0 \\ \overrightarrow{BA_1} \cdot \vec{n}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2 = (0, 2\sqrt{3}, -1).$$
 ..... 10分



设二面角  $A - A_1B - C$  的平面角为  $\theta$ , 则  $|\cos \theta| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12 + \sqrt{3}^2} \sqrt{12 + 1^2}} = \frac{\sqrt{65}}{65}$ ,

所以  $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{65}}{65}\right)^2} = \frac{8\sqrt{65}}{65}$ , 则二面角  $A - A_1B - C$  的正弦值为  $\frac{8\sqrt{65}}{65}$ . ..... 12分

20. (12分) 解: (1) 因为椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ , 所以  $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$ , 点

$P\left(1, \frac{3}{2}\right)$  与圆  $x^2 + \left(y - \frac{a+3}{2}\right)^2 = 1$  上点  $M$  的距离的最大值为  $\sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{a+3}{2}\right)^2} + 1 = \sqrt{2} + 1$ , 解得  $a = 2, b = \sqrt{3}$ , 则椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . ..... 4分

(2) 当直线  $l$  斜率存在时, 设直线  $l: y = kx + m$ ,

$$\begin{cases} y = kx + m \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow (3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + (4m^2 - 12) = 0,$$

设点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 则  $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-8km}{3 + 4k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} \end{cases}$ , ..... 6分

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} &= \left(x_1, y_1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x_2, y_2 - \frac{2}{3}\right) = x_1 x_2 + \left(y_1 - \frac{2}{3}\right) \left(y_2 - \frac{2}{3}\right) \\ &= x_1 x_2 + \left(kx_1 + m - \frac{2}{3}\right) \left(kx_2 + m - \frac{2}{3}\right) = (1 + k^2)x_1 x_2 + \left(km - \frac{2}{3}k\right) (x_1 + x_2) + \left(m - \frac{2}{3}\right)^2 \\ (1 + k^2) \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} + \left(km - \frac{2}{3}k\right) \frac{-8km}{3 + 4k^2} + \left(m - \frac{2}{3}\right)^2 &= -\frac{23}{9} \end{aligned}$$
 ..... 8分

所以  $7m^2 - 4m - 3 = 0 \Rightarrow m = 1$  或  $m = -\frac{3}{7}$ . ..... 10分

则直线  $l: y = kx + 1$  或  $l: y = kx - \frac{3}{7}$ , 因为  $l$  不过  $(0, 1)$ , 则直线  $l: y = kx - \frac{3}{7}$ , 即直线  $l$  过定点  $\left(0, -\frac{3}{7}\right)$ .

当直线  $l$  斜率不存在时, 设直线  $l: x = t$ , 不妨设  $A\left(t, \sqrt{3 - \frac{3}{4}t^2}\right)$ ,  $B\left(t, -\sqrt{3 - \frac{3}{4}t^2}\right)$ .

所以  $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = \left(t, \sqrt{3 - \frac{3}{4}t^2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(t, -\sqrt{3 - \frac{3}{4}t^2} - \frac{2}{3}\right) = t^2 + \frac{4}{9} - \left(3 - \frac{3}{4}t^2\right) = \frac{7}{4}t^2 - \frac{23}{9} = -\frac{23}{9}$ , 所以  $t = 0$ , 直线  $l: x = 0$ , 此时  $l$  过点  $(0, 1)$ , 不满足题意.

综上, 直线  $l$  过定点  $\left(0, -\frac{3}{7}\right)$ . ..... 12分

21. (12分) 解: (1) 因为  $f(x) = x \ln x - 3x + 4 \ln(x + 1)$ ,  $f'(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$ ,

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0, \text{ 所以 } f'(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, 又因为 } f'(1) = 0,$$

所以, 当  $x \in (0, 1)$  时,  $f'(x) < f'(1) = 0$ ,  $f(x)$  单调递减; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f'(x) > f'(1) = 0$ ,  $f(x)$  单调递增; 所以  $f(x)_{\min} = f(1) = 4 \ln 2 - 3$ , 则  $f(x)$  的最小值为  $4 \ln 2 - 3$ , 则  $M = 4 \ln 2 - 3$ . ..... 4分

$$\begin{aligned} (2) g_{2022}(x) &= g_{2021}(x) + g_{2021}\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \left[ g_{2020}(x) + g_{2020}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 2^2 \left[ g_{2019}(x) + g_{2019}\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \dots \\ &= 2^{2020} \left[ g_1(x) + g_1\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 2^{2021} \left[ f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \end{aligned}$$
 ..... 6分

设函数  $h(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ ,

$$h'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = \left[ \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \right] - \frac{1}{x^2} \left[ \ln \frac{1}{x} - \frac{2\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\frac{1}{x}+1} \right] = \left[ \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \right] +$$

$$\frac{1}{x^2} \left[ \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \right] = \frac{(x^2+1)}{x^2} \left[ \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \right],$$
 ..... 8分

令  $\varphi(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$ ,  $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0$ , 所以  $\varphi(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又因为  $\varphi(1) = 0$ , 所以, 当  $x \in (0, 1)$  时,  $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$ ,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $\varphi(x) > \varphi(1) = 0$ ,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增. 所以  $h(x)_{\min} = h(1) =$



$2f(1) = 2(4 \ln 2 - 3)$ , ..... 10分

则  $g_{2022}(x)_{\min} = 2^{2021}h(x)_{\min} = 2^{2022}(4 \ln 2 - 3)$ , 则  $\frac{N}{M} = \frac{2^{2022}(4 \ln 2 - 3)}{4 \ln 2 - 3} = 2^{2022}$ ,  $\log_2 \frac{N}{M} = 2022$ .

..... 2分

22. [选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

解: (1) 因为  $A(-2, 0)$ ,  $B(1, 0)$ , 动点  $P(x, y)$  满足  $|PA| = 2|PB|$ ,

所以  $\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ , 整理得曲线  $C$  的方程为  $(x-2)^2 + y^2 = 4$ , 则曲线  $C$  的一个参数方程为

$\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数); ..... 5分

(2) 因为  $|PA| = 2|PB|$ , 所以  $|PA| \cdot |PB| = \frac{1}{2}|PA|^2 = \frac{1}{2}[(2 + 2 \cos \theta + 2)^2 + (2 \sin \theta)^2]$ ,

则  $|PA| \cdot |PB| = \frac{1}{2}|PA|^2 = \frac{1}{2}(20 + 16 \cos \theta) = 10 + 8 \cos \theta \in [2, 18]$ ,

所以  $|PA| \cdot |PB|$  的取值范围为  $[2, 18]$ . ..... 10分

23. [选修4-5: 不等式选讲] (10分)

解: (1) 当  $a = 0$  时, 不等式  $f(x) \leq 4$  化简为  $|x^2 - 3| + |x^2 - 1| \leq 4$ , 令  $t = x^2 \in [0, +\infty)$ ,

则  $|t - 3| + |t - 1| \leq 4$ , 当  $0 \leq t \leq 1$  时,  $4 - 2t \leq 4 \Rightarrow t \geq 0$ , 则  $0 \leq t \leq 1$ ;

当  $1 < t < 3$  时,  $2 \leq 4$  恒成立, 则  $1 < t < 3$ ;

当  $t \geq 3$  时,  $2t - 4 \leq 4 \Rightarrow t \leq 4$  恒成立, 则  $3 \leq t \leq 4$ .

综上,  $0 \leq t \leq 4$ , 即  $0 \leq x^2 \leq 4$ , 解得  $-2 \leq x \leq 2$ , 所以解集为  $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$ . ..... 5分

(2)  $f(x) = |x^2 - 3a^2 - 3| + |x^2 - a - 1| \geq 2$  恒成立,

因为  $f(x) = |x^2 - 3a^2 - 3| + |x^2 - a - 1| = |3a^2 + 3 - x^2| + |x^2 - a - 1| \geq |3a^2 - a + 2| = 3a^2 - a + 2$ .

即  $3a^2 - a + 2 \geq 2$ , 解得  $a \leq 0$  或  $a \geq \frac{1}{3}$ . ..... 10分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站(网址: [www.zizzs.com](http://www.zizzs.com))和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线