

姓名 _____ 座位号 _____
(在此卷上答题无效)

数 学(文科)

本试卷共4页,全卷满分150分,考试时间120分钟。

考生注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \ln x < 1\}$, $B = \{x | \sqrt{x+1} < \sqrt{3}\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$ A

A. $[2, e)$ B. $(0, 2)$ C. $(2, e]$ D. $(0, e)$

2. 复数 z 满足 $(2-i)z = 3+4i$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的模等于 B

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_7 = 28$, $a_2 + a_4 = 7$, 则 $a_6 =$ C

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

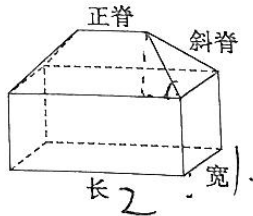
4. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 3 \\ x+y \geq 2 \\ y \leq x \end{cases}$, 则 $z = 4x+y$ 的最大值为 D

A. 8 ~~B. 10~~ C. 12 D. 15

5. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\cos A > \cos B$ ” 是 “ $\sin A < \sin B$ ” 的 D

A. 充分不必要条件 ~~A~~ B. 必要不充分条件 D
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 成语“运筹帷幄之中,决胜千里之外”,意思是在小小的军帐之内作出正确的部署,决定了千里之外战场上的胜利,说的是运筹的重要性。“帷幄”是古代打仗必备的帐篷,又称“幄帐”。右图是一种幄帐示意图,帐顶采用“五脊四坡式”,四条斜脊的长度相等,一条正脊平行于底面。若各斜坡面与底面所成二面角的正切值均为 $\frac{1}{2}$,



底面矩形的长与宽之比为 $2:1$, 则正脊与斜脊长度的比值为

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{5}{4}$

【D-022】数学(文科)试卷 第1页(共4页)

7. 已知 $\alpha \in \mathbf{R}$, $2\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 则 $\tan 2\alpha =$

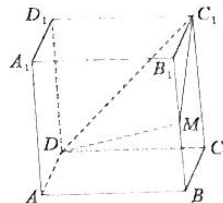
- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\pm \frac{3}{4}$ D. $\pm \frac{4}{3}$

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+1)$ 为偶函数, $f(x+2)$ 是奇函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时 $f(x) = ax^2 + bx$, 若 $f(0) + f(-1) = 1$, 则 $f(\frac{7}{2}) =$

- A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4, BB_1 的中点为 M , 过 C_1, D, M 的平面把正方体分成两部分, 则较小部分的体积为

- A. $\frac{52}{3}$ B. 18 C. $\frac{56}{3}$ D. $\frac{58}{3}$



10. 设 $a \neq 0$, 若 $x = a$ 是函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极小值点, 则

- A. $a < b$ B. $a > b$ C. $a^2 < ab$ D. $a^2 > ab$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{3}$, D 是 BC 上一点, 且 $BD = 3DC$, $AD = 3$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值是

- A. $3\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $5\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$

12. 已知 $f(x) = e^x - ax^2$ (a 为常数), 则下列结论

(1) 当 $a = \frac{e}{2}$ 时, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极值点

(2) 若 $f(x)$ 有 3 个零点, 则实数 a 的最小值是 $\frac{e^2}{4}$

(3) $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的零点 x_0 满足 $-1 < x_0 < -\frac{1}{2}$

正确的个数有

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $5^a = 4^b = 10$, 则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} =$ 2.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 平面向量 $\vec{OA} = (2, 0)$, 将 \vec{OA} 绕原点逆时针旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 得到向量 $-\frac{1}{2}\vec{OB}$, 若 A, B, C 三点共线, 则 \vec{OC} 在 \vec{OA} 方向上的投影是_____.

15. 已知正数 x, y 满足 $x + \frac{1}{4y} = 2$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最小值是_____.

16. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ 在 $(0, 2]$ 上有最大值和最小值, 且取得最大值和最小值的自变量的值者是唯一的, 则 ω 的取值范围是_____.

三. 解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\cos 2B - \sin(B - \frac{\pi}{2}) = 0$.

(1) 求角 B ;

(2) 若 $a=4$, BC 边上的中线 $AD=\sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)

如图 1, 直角梯形 $ABCD$ 中 $AD \parallel BC$, $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $AD=1, AB=2, BC=3$, 将梯形沿中位线 EF 折起并连接 AB, CD 得到图 2 所示的多面体 $AEB-DFC$, 且 $AE \perp CE$.

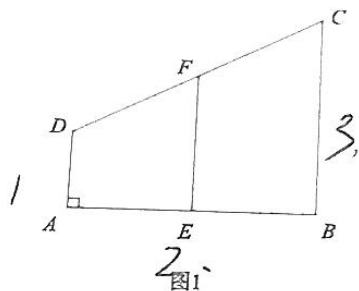


图1

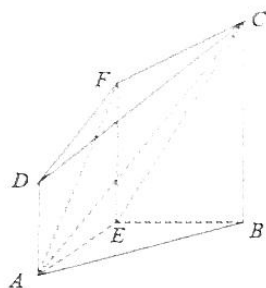


图2

(1) 证明: $BE \perp$ 平面 AEF ;

(2) 求点 F 到平面 ACE 的距离.

19. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , $a_1=2, S_{n+1}=S_n+2a_n-1, n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n-1\}$ 是等比数列;

(2) 数列 $\left\{ \frac{2^n}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和是 T_n , 证明: $T_n < 1$.

20. (12分)

已知函数 $f(x) = xe^x$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

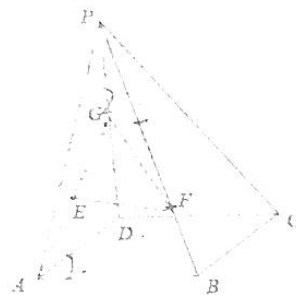
(2) 若 $g(x) = xe^{2-x} - \ln x - 1$, 证明: $g(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

21. (12分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $PD = 2$, G 为 PD 的中点, E 为 AG 的中点, 点 F 在线段 PB 上, 且 $PF = 3FB$.

(1) 求证: $EF \parallel$ 平面 $ABCD$;

(2) 求 GF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.



22. (12分)

已知函数 $f(x) = x - a \ln x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值点;

(2) 若方程 $f(x) = k$ 有 2 个不等的实根 x_1, x_2 , 证明: $x_1 + x_2 > 2a$.

自主选拔在线
微信号: zizzsw

自主选拔在线
微信号: zizzsw

皖江名校联盟 2022 届高三第四次联考
文科数学

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	D	C	B	A	A	C	D	B	B

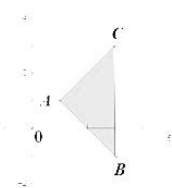
1. 【解析】 $A = (0, e), B = [-1, 2], \complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x < -1, \text{ 或 } x \geq 2\}, A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = [2, e)$.

2. 【解析】 $z = \frac{3+4i}{2-i} = \frac{2+11i}{5}$, 所以 $|z| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{121}{25}} = \sqrt{5}$. 或者根据复数模的性质.

$$|z| = \left| \frac{3+4i}{2-i} \right| = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

3. 【解析】 $S_7 - 7a_4 = 28 \Rightarrow a_4 = 4$, 故 $a_3 = 3$, 得 $a_6 = 2a_4 - a_3 = 5$.

4. 【解析】 如图, 画出可行域, $z = 4x + y$ 表示斜率为 -4 的一组平行线, 当过点 $C(3, 3)$ 时, 目标函数取得最大值 $z_{\max} = 4 \times 3 + 3 = 15$.



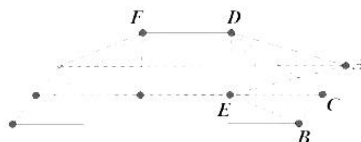
5. 【解析】 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A > \cos B \Leftrightarrow A < B \Leftrightarrow a < b \Leftrightarrow \sin A < \sin B$.

6. 【解析】 如图, 不妨设 $DE = 1, AC = BC = CE = 2$,

可得斜脊 $AD = \sqrt{1+4+4} = 3$, 因为矩形宽 $AB = 4$,

所以长为 8, 这样正脊 $DF = 8 - 2 \times 2 = 4$, 所以正脊与斜

脊长度的比值为 $4:3$ 即 $\frac{4}{3}$.



7. 【解析】 因为 $2\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{5} \sin(\alpha + \phi) = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 其中 $\tan \phi = \frac{1}{2}$,

得 $\sin(\alpha + \phi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\alpha + \phi = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ 或者 $2k\pi + \frac{3\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$,

则 $\tan \alpha = \tan(\frac{\pi}{4} - \phi) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 1 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ 或者 $\tan \alpha = \tan(\frac{3\pi}{4} - \phi) = \frac{-1 - \frac{1}{2}}{1 - 1 \times \frac{1}{2}} = -3$,

所以 $\tan 2\alpha = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$ 或者 $\tan 2\alpha = \frac{2 \times (-3)}{1 - (-3) \times (-3)} = -\frac{3}{4}$. 故选 A.

方法 2: $2\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 两边平方得 $\frac{4\sin^2 \alpha + 4\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{10}{4}$,

因此 $\frac{4\tan^2 \alpha + 4\tan \alpha + 1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{5}{2}$, 可得 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ 或者 $\tan \alpha = -3$, 后同解法 1.

8. 【解析】由题设 $f(2+x)+f(2-x)=0$, 令 $x=0$ 得 $f(2)=4a+2b=0$;
 $f(1+x)=f(1-x)$, 令 $x=1$ 得 $f(0)=f(2)=0$. 所以 $f(-1)=f(3)=-f(1)=-a-b$;
 解方程组 $\begin{cases} 4a+2b=0 \\ -a-b=1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$, 因此 $f(\frac{7}{2})=-f(\frac{1}{2})=-f(\frac{3}{2})=-[(\frac{3}{2})^2-2\times\frac{3}{2}]=\frac{3}{4}$.

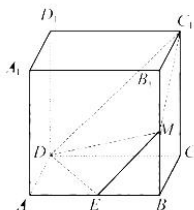
9. 【解析】如图, 截面是等腰梯形 C_1MED , E 是 AB 的中点.

较小部分是三棱台 $BEM-CDC_1$, 上底 $S_1=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$,

下底 $S_2=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$, 所以 $V=\frac{1}{3}(2+8+\sqrt{2\times 8})\times 4=\frac{56}{3}$.

方法2: 较小部分可看成四棱锥 $M-BCDE$ 和三棱锥 $M-CC_1D$ 的组合,

$V=\frac{1}{3}\times(\frac{2+4}{2}\times 4)\times 2+\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times 4\times 4)\times 4=\frac{56}{3}$.



10. 【解析】因为 $f(a)=0$ 是极小值, 所以在 $x=a$ 附近函数值都是正数, $a(a-b)>0$

因此 $a^2 > ab$.

11. 【解析】设 $CD=x, BD=3x, \angle ADB=\theta$, 由余弦定理可得

$$b^2=9+x^2+6x\cos\theta, c^2=9+9x^2-18x\cos\theta, \text{ 消去 } \cos\theta \text{ 得 } 3b^2+c^2=36+12x^2,$$

$$\text{又 } b^2+c^2-bc=16x^2, \text{ 联立消去 } x \text{ 得 } 144=9b^2+c^2+3bc\geq 6bc+3bc=9bc$$

$$\text{所以 } bc\leq 16, \text{ 因此 } S=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}\leq\frac{1}{2}\cdot 16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}.$$

$$\text{方法2: } \overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}, \text{ 所以 } \overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2+\frac{9}{16}\overrightarrow{AC}^2+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$\text{因此 } 9=\frac{1}{16}c^2+\frac{9}{16}b^2+\frac{3}{16}bc\geq 2\times\frac{3}{16}bc+\frac{3}{16}bc=\frac{9}{16}bc, \text{ 得 } bc\leq 16, \text{ 后同解法1.}$$

12. 【解析】(1) 当 $a=\frac{e}{2}$ 时 $f'(x)=e^x-ex\geq 0$, $f(x)$ 没有极值点, 结论 (1) 错误;

(2) 考虑函数 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}$, $g'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$, $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, 2)$ 单调递减,

在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 唯一的极小值 $f(2)=\frac{e^2}{4}$. 结合图像可知 $a=\frac{e^2}{4}$ 时 $f(x)$ 只有 2 个零点

($x_1=2, x_2<0$), 结论 (2) 错误. (3) $a=\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的唯一零点 x_0 是负数,

注意 $g(-1)=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}, g(-\frac{1}{2})=\frac{4}{\sqrt{e}}>\frac{1}{2}$, 所以结论 (3) 正确.

13. 【答案】2 【解析】 $a=\log_5 10, b=\log_4 10$, 得 $\frac{1}{a}=\lg 5, \frac{1}{b}=\lg 4=2\lg 2$, 所以

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=2\lg 5+2\lg 2=2$$

14. 【答案】2 【解析】 \overrightarrow{OA} 绕原点逆时针旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 得到 $\overrightarrow{OA'}=(-1, \sqrt{3})$, 所以 $\overrightarrow{OB}=(2, -2\sqrt{3})$,

直线 AB 方程是 $x=2$. \overrightarrow{OC} 在 \overrightarrow{OA} 方向上的投影就是 $|OA|=2$.

15. 【答案】 $\frac{1}{4}$ 【解析】 $2 = x + \frac{1}{4y} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \Rightarrow \frac{x}{y} \leq 4 \Rightarrow \frac{y}{x} \geq \frac{1}{4}$

16. 【答案】 $(-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6})$

【解析】 当 $\omega > 0$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, 2\omega + \frac{\pi}{6}]$, 所以 $\frac{5\pi}{6} \leq 2\omega + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{2}$, 得 $\frac{\pi}{3} \leq \omega < \frac{7\pi}{6}$ 。

当 $\omega < 0$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in [2\omega + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, 所以 $-\frac{5\pi}{2} \leq 2\omega + \frac{\pi}{6} < -\frac{7\pi}{6}$, 得 $-\frac{4\pi}{3} < \omega \leq -\frac{\pi}{3}$ 。

17. 【解析】 (1)

$$\cos 2B - \sin(B - \frac{\pi}{2}) = \cos 2B + \cos B = 2\cos^2 B - 1 + \cos B = 0$$

所以 $\cos B = \frac{1}{2}$ 或者 $\cos B = -1$ (舍去), 3分

又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 5分

(2) 因为 $AD^2 = 2^2 + c^2 - 4c \cos \frac{\pi}{3} = 7$, 7分

所以 $c = 3, S = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$ 10分

18. 【解析】 (1) 由梯形中位线性质可得 $AE = BE = 1, EF = \frac{1}{2}(1+3) = 2, EF \perp AB$,

折起后 $EF \perp AE, EF \perp BE$ 2分

$AE \perp EF, AE \perp CE, EF \cap CE = E \Rightarrow AE \perp$ 平面 $BEF \Rightarrow AE \perp BE$, 4分

所以 $AE \perp BE, EF \perp BE, AE \cap EF = E \Rightarrow BE \perp$ 平面 AEF ; 6分

(2) 由 (1) $BE \perp$ 平面 AEF , 得 \perp 棱锥 $C-AEF$ 的高 $h = BE = 1$,

底面积 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$, 所以三棱锥 $C-AEF$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$ 7分

又由题设 $CE^2 = BE^2 + BC^2 = 1 + 9 = 10, CE = \sqrt{10}, S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 9分

因为 $V_{C-AEF} = V_{F-ACE}$, 设点 F 到平面 ACE 的距离为 h ,

则 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times h = \frac{1}{3}, h = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 即求点 F 到平面 ACE 的距离等于 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 12分

19. 【解析】(1) 由 $S_{n+1} = S_n + 2a_n - 1$ 可得 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 2a_n - 1$ 2分

因为 $a_n - 1 \neq 0$, 所以 $\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1} = 2, a_1 - 1 = 1$,

故 $\{a_n - 1\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的对比数列 5分

(2) 由 (1) 可得 $a_n - 1 = 1 \times 2^{n-1}$, 得 $a_n = 2^{n-1} + 1$ 6分

$\therefore \frac{2^n}{a_n a_{n+1}} = \frac{2^n}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)} = 2(\frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1})$ 8分

所以 $T_n = 2[\frac{1}{2^0+1} - \frac{1}{2^1+1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1}] = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n+1}) = 1 - \frac{2}{2^n+1} < 1$ 12分

20. 【解析】(1) $f'(x) = (x+1)e^x$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = -1$, 2分

在 $(-\infty, -1)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增

所以单调递增区间为 $(-1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, -1)$ 4分

(2) 由题设 $g(x) = xe^x - x - \ln x - 1 (x > 0)$, $g'(x) = (x+1)(e^x - \frac{1}{x})$, 6分

令 $g'(x) = 0$ 得 $x_0 e^{x_0} = 1, x_0 + \ln x_0 = 0$, 8分

$g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增,

$g(x)$ 在 $x = x_0$ 取唯一的极小值, 也是最小值, 10分

$g(x_0) = x_0 e^{x_0} - x_0 - \ln x_0 - 1 = 0$, 所以 $g(x) \geq g(x_0) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立. 12分

另解: $g(x) = xe^x - x - \ln x - 1 = e^{x+\ln x} - (x + \ln x) - 1$, 证 $h(t) = e^t - t - 1 \geq 0$ 即可.

21. 【解析】(1) 取 DG 中点 H , 连接 EH, FH, BD ,

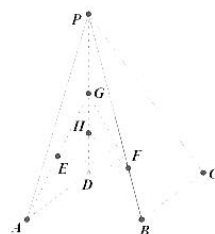
由中位线定理得 $EH \parallel AD$ 且 EH 不属于平面 $ABCD$ 所以 $EH \parallel$ 平面 $ABCD$ 2分

又因为 $\frac{PH}{HD} = \frac{PF}{FD} = 3$, 得 $HF \parallel BD$ 所以 $HF \parallel$ 平面 $ABCD$

因为 EH, HF 是平面 EFH 内的 2 条相交直线

所以 平面 $EFH \parallel$ 平面 $ABCD$, 4分

又 $EF \subset$ 平面 EFH , 因此 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$; 6分



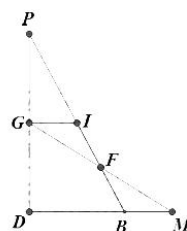
(2)、由已知易得直线 GF 在平面 $ABCD$ 上的射影为直线 DB , 7 分
在平面 PDB 内, 延长 GF 交直线 DB 于 M ,

则 GF 与平面 $ABCD$ 所成角是 $\angle GMD$ 8 分

过 G 作中位线 GI , 易得 $BM = GI = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}$, 9 分

所以 $DM = \frac{3}{2}$, $GM = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$, 10 分

$\sin \angle GMD = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ 11 分



所以 GF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值等于 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ 12 分

22. 【解析】(1) $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 求导得 $f'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x}$ 1 分

当 $a \leq 0$ 时 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 没有极值点 2 分

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = a$,

在 $(0, a)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增。

所以函数 $f(x)$ 有极小值点 $x = a$, 无极大值点 4 分

(2) 由 (1) 知方程 $f(x) = k$ 有 2 个不等的实根 x_1, x_2 时, $f(x)$ 在定义域上不单调,

一定有 $a > 0$, 在 $(0, a)$ 上 $f(x)$ 单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递增,

不妨设 $0 < x_1 < a < x_2$ 6 分

考虑函数 $g(x) = f(x) - f(2a-x)$, $x \in (0, a)$.

因为 $g(x) = x - a \ln x - (2a-x) + a \ln(2a-x)$, 求导得

$g'(x) = 1 - \frac{a}{x} + 1 - \frac{a}{2a-x} = 2 - (\frac{1}{x} + \frac{1}{2a-x})a = 2 - \frac{2a^2}{x(2a-x)}$ 8 分

(也可以用复合求导 $g'(x) = f'(x) - f'(2a-x)$, 结果一样)

由 $x \in (0, a)$ 得 $0 < x(2a-x) < a^2$, 因此 $\frac{2a^2}{x(2a-x)} > 2$, $g'(x) < 0$

所以 $g(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, $g(x) > g(a) = 0$,

即 $f(x) > f(2a-x), x \in (0, a)$ 10 分

结合题设有 $f(x_2) = f(x_1) > f(2a-x_1)$, 注意到 $x_2 \in (a, +\infty), 2a-x_1 \in (a, +\infty)$,

而 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $x_2 > 2a-x_1$, 即 $x_1 + x_2 > 2a$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线