

东莞中学、广州二中、惠州一中、深圳实验、珠海一中、中山纪念中学
2024 届高三第二次六校联考试题标准答案及评分标准

一、单项选择题 二、多项选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	A	D	D	A	C	C	AB	BCD	ABD	ACD

三、填空题：（每小题 5 分，共 20 分）

13. $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ 或者 $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}, x \in [-1, 1]$ 或者 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 或者...

14. $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 15. $2, \frac{5\sqrt{3}}{14}$ 16. $(-\infty, 0) \cup [\frac{2}{e}, +\infty)$

四、解答题

17. 【解析】(1) 解法一： $c\cos B + b\cos C = 3a\cos C$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 得 $\sin C\cos B + \sin B\cos C = 3\sin A\cos C$,2 分

所以 $\sin(B+C) = 3\sin A\cos C$,3 分

由于 $A+B+C=\pi$, 所以 $\sin(B+C) = \sin(\pi-A) = \sin A$, 则 $\sin A = 3\sin A\cos C$.

因为 $0 < A < \pi$, 所以 $\sin A \neq 0$, $\cos C = \frac{1}{3}$4 分

因为 $0 < C < \pi$, 所以 $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$5 分

解法二：因为 $c\cos B + b\cos C = 3a\cos C$.

所以由余弦定理得 $c \times \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = (3a-b) \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, 化简得 $a^2+b^2-c^2 = \frac{2}{3}ab$,

所以 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{\frac{2}{3}ab}{2ab} = \frac{1}{3}$.

因为 $0 < C < \pi$, 所以 $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(2) 由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$,7 分

及 $a = b + \sqrt{2}, c = 3\sqrt{2}$, $\cos C = \frac{1}{3}$, 得 $a^2 + b^2 - \frac{2}{3}ab = 18$,

即 $(a-b)^2 + \frac{4}{3}ab = 18$. 所以 $ab = 12$8 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$10 分

18. 【解析】(1) 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, $DE \parallel AC$, $DF \parallel AB$

\therefore 四边形 $AEDF$ 为平行四边形, 则 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ 均为边长为 1km 的等边三角形

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3} (\text{km}^2)$, $S_{\triangle BDE} = S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{km}^2)$

∴绿化面积为： $\sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} (km^2)$ 3分

(2) 方法一：由题意知： $30^\circ < \alpha < 90^\circ, BD=CD=1$

∴ $S(\alpha) = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BDE} - S_{\triangle CDF} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}(BE+CF)\sin 60^\circ = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}(BE+CF)$ 4分

在 $\triangle BDE$ 中， $\angle BED = 120^\circ - \alpha$ ，由正弦定理得： $BE = \frac{\sin \alpha}{\sin(120^\circ - \alpha)}$ 5分

在 $\triangle CDF$ 中， $\angle CDF = 120^\circ - \alpha$ ， $\angle CFD = \alpha$

由正弦定理得： $CF = \frac{\sin(120^\circ - \alpha)}{\sin \alpha}$ 6分

∴ $BE+CF = \frac{\sin \alpha}{\sin(120^\circ - \alpha)} + \frac{\sin(120^\circ - \alpha)}{\sin \alpha}$ 7分

令 $t = \frac{\sin(120^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha + \frac{1}{2}\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\tan \alpha} + \frac{1}{2}$

∵ $30^\circ < \alpha < 90^\circ \therefore \tan \alpha \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty) \therefore t \in (\frac{1}{2}, 2)$ 10分

$BE+CF = \frac{1}{t} + t = f(t)$

∴ $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \therefore f(t)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递减； $f(t)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增。

∴ $f(t) \in [2, \frac{5}{2}]$ 即 $BE+CF \in [2, \frac{5}{2}] \therefore S(\alpha) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}(BE+CF) \in (\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

即花草地面积 $S(\alpha)$ 的取值范围为 $(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ 12分

方法二：由已知得 $\alpha + \angle BED + \angle B = \pi, \alpha + \angle EDF + \angle FDC = \pi$,

又 $\angle B = \angle EDF = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\therefore \angle BED = \angle FDC$,

在 $\triangle BED$ 和 $\triangle CDF$ 中有： $\angle B = \angle C = 60^\circ, \angle BED = \angle FDC$ ， $\therefore \triangle BED \sim \triangle CDF$ ，得 $\frac{BE}{DC} = \frac{BD}{CF}$

又D是BC的中点， $\therefore DC = BD = 1 \therefore BE \cdot FC = 1$ ，且当E在点A时， $CF = \frac{1}{2}$ ，

所以 $\frac{1}{2} < CF < 2$ ，所以 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times BE - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times CF = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}(BE+CF)$ ，

设 $CF = x$ ， $BE = \frac{1}{x}$ ，且 $\frac{1}{2} < x < 2$ ，令 $y = x + \frac{1}{x}$ ，则 $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$ ，

∴ $\frac{1}{2} < x < 1$ 时， $y' < 0, y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 单调递减， $1 < x < 2$ 时， $y' > 0, y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 上单

调递增，∴ $x=1$ 时， $y = x + \frac{1}{x}$ 有最小值2，当 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x=2$ 时， $y = x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ ，

所以面积s的取值范围是 $(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ 。

19. 【解析】(1) $f(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \sin(A - x) = \sin x (\sin A \cos x - \cos A \sin x)$ 2分

$$= \sin x \cos x \sin A - \cos A \sin^2 x$$

$$= \sin A \times \frac{\sin 2x}{2} - \cos A \times \frac{1 - \cos 2x}{2} = -\frac{1}{2} \cos A + \frac{1}{2} \cos(2x - A), \quad \dots\dots\dots 4分$$

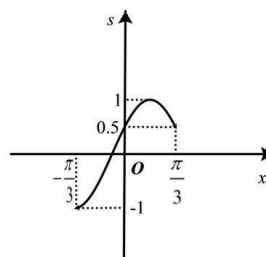
故 $f(x)_{\max} = -\frac{1}{2} \cos A + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 故 $\cos A = \frac{1}{2}$.

因为 $A \in (0, \pi)$, 故 $A = \frac{\pi}{3}$ 5分

(2) $f(x) = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}$,

故 $g(x) = 2\left(f(x) + \frac{1}{4}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$,

令 $s = g(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, 则 $g(x)$ 的图象如图所示: 可得 $s \in [-1, 1]$,



. 6分

方程 $4[g(x)]^2 - m[g(x)] + 1 = 0$ 在 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 内有两个不同的解

又 $s \in [-1, 1]$, 下面考虑 $4s^2 - ms + 1 = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上的解的情况.

若 $\Delta = m^2 - 16 = 0$, 则 $m = -4$ 或 $m = 4$ (舍)

当 $m = -4$ 时, 方程的解为 $s = -\frac{1}{2}$, 此时 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ 仅有一解,

故方程 $4[g(x)]^2 - m[g(x)] + 1 = 0$ 在 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 内有一个解, 舍. 8分

若 $\Delta = m^2 - 16 > 0$, 则 $m < -4$ 或 $m > 4$,

此时 $4s^2 - ms + 1 = 0$ 在 R 有两个不同的实数根 $s_1, s_2 (s_1 < s_2)$,

当 $m < -4$ 时, 则 $s_1 < 0, s_2 < 0$,

要使得方程 $4[g(x)]^2 - m[g(x)] + 1 = 0$ 在 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ 内有两个不同的解,

则 $-1 \leq s_1 < 0, -1 \leq s_2 < 0$.

令 $h(s) = 4s^2 - ms + 1$, 则 $\begin{cases} m < -4 \\ h(-1) \geq 0 \\ -1 < \frac{m}{8} < 0 \\ h(0) > 0 \end{cases}$, 解得 $-5 \leq m < -4$ 12分

综上, m 的取值范围为: $[-5, -4)$.

20. 【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2e^{2x} - \frac{a}{x} (x > 0)$ 1分

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f'(x)$ 没有零点; 2分

当 $a > 0$ 时, 因为 e^{2x} 单调递增, $-\frac{a}{x}$ 单调递增, 所以 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, . . . 3分

当 b 满足 $0 < b < \frac{a}{4}$ 且 $b < \frac{1}{4}$ 时, 即

若 $a \geq 1, b < \frac{1}{4}$ 时, $f'(b) < f'\left(\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{e} - 4a \leq 2\sqrt{e} - 4 < 0$;

若 $0 < a < 1, b < \frac{a}{4} < \frac{1}{4}$ 时, $f'(b) < f'(\frac{a}{4}) = 2e^{\frac{a}{4}} - 4 < 2\sqrt{e} - 4 < 0$; 则 $f'(b) < 0 \dots 5$ 分

另法: $x \rightarrow 0$ 时 $2e^{2x} \rightarrow 0, -\frac{a}{x} \rightarrow -\infty (a > 0)$, 所以 $x \rightarrow 0, f'(x) \rightarrow -\infty$

且 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是连续的, 所以必存在 b 使得 $f'(b) < 0$,

又 $f'(a) > 0$ 即有 $f'(a)f'(b) < 0$, 故当 $a > 0$ 时 $f'(x)$ 存在唯一零点. $\dots\dots 6$ 分

(2) 当 $a > 0$ 时由 (1), 可设 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的唯一零点为 x_0 ,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. $\dots\dots\dots 7$ 分

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增,

所以 $x = x_0$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(x_0)$. $\dots\dots 8$ 分

由于 $f'(x_0) = 2e^{2x_0} - \frac{a}{x_0} = 0$, $\dots\dots\dots 9$ 分

所以 $f(x_0) = \frac{a}{2x_0} + 2ax_0 + a \ln \frac{2}{a} \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$. $\dots\dots 11$ 分

故当 $a > 0$ 时, $f(x) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$. $\dots\dots 12$ 分

21. 【解析】(1) 因为 $f(x) = e^x \ln(1+x)$, 所以 $f(0) = 0$, 即切点坐标为 $(0,0)$, $\dots 1$ 分

又 $f'(x) = e^x [\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}]$, \therefore 切线斜率 $k = f'(0) = 1$. \therefore 切线方程为 $y = x$ $\dots\dots 3$ 分

(2) 令 $g(x) = f'(x) = e^x [\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}]$

则 $g'(x) = e^x [\ln(1+x) + \frac{2}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}]$ $\dots\dots\dots 4$ 分

令 $h(x) = \ln(1+x) + \frac{2}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$, 则 $h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3} = \frac{x^2+1}{(x+1)^3} > 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $\dots\dots\dots 6$ 分

$\therefore h(x) \geq h(0) = 1 > 0 \therefore g'(x) > 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立 $\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. $\dots 7$ 分

(3) 解: 待证不等式等价于 $f(s+t) - f(s) > f(t) - f(0)$,

令 $m(x) = f(x+t) - f(x) (x, t > 0)$, 只需证 $m(x) > m(0)$ $\dots\dots\dots 8$ 分

$\therefore m(x) = f(x+t) - f(x) = e^{x+t} \ln(1+x+t) - e^x \ln(1+x)$

$m'(x) = e^{x+t} \ln(1+x+t) + \frac{e^{x+t}}{1+x+t} - e^x \ln(1+x) - \frac{e^x}{1+x} = g(x+t) - g(x) \dots\dots\dots 10$ 分

由 (2) 知 $g(x) = f'(x) = e^x [\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}]$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(x+t) > g(x)$ $\dots\dots\dots 11$ 分

$\therefore m'(x) > 0 \therefore m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $x, t > 0 \therefore m(x) > m(0)$, 所以命题得证. $\dots\dots 12$ 分

22. 【解析】(1) $f'(x) = (xe^{ax})' = (1+ax)e^{ax}$, 1分

当 $a \geq 0$ 时, 则 $1+ax \geq 0$ 对任意 $x \in [0, 2]$ 恒成立, 即 $f'(x) \geq 0$ 恒成立.

所以 $f(x)$ 在 $x \in [0, 2]$ 单调递增. 则 $f(x)$ 的最大值为 $f(x)_{\max} = f(2) = 2e^{2a}$; 2分

当 $a < 0$ 时, 令 $1+ax = 0$, 即 $x = -\frac{1}{a}$

当 $-\frac{1}{a} \in (0, 2)$, 即 $a < -\frac{1}{2}$ 时, 当 $x \in [0, -\frac{1}{a})$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $[0, -\frac{1}{a})$ 上单调递增.

当 $x \in (-\frac{1}{a}, 2]$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{a}, 2]$ 上单调递减, $\therefore f(x)_{\max} = f(-\frac{1}{a}) = -\frac{1}{ea}$. 3分

当 $-\frac{1}{a} \in [2, +\infty)$ 即 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 时, $1+ax \geq 0$ 对任意 $x \in [0, 2]$ 恒成立, 即 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $x \in [0, 2]$ 单调递增. 则 $f(x)$ 的最大值为 $f(x)_{\max} = f(2) = 2e^{2a}$; 4分

综上所述: 当 $a \geq -\frac{1}{2}$ 时 $f(x)_{\max} = f(2) = 2e^{2a}$; 当 $a < -\frac{1}{2}$ 时 $f(x)_{\max} = f(-\frac{1}{a}) = -\frac{1}{ea}$ 5分

(2) 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行,

所以 $f'(1) = (1+a)e^a = 0$, 则 $a = -1$, 即 $f'(x) = (1-x)e^{-x}$.

当 $x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增

当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

又因为 $x < 0$ 时有 $f(x) < 0$; $x > 0$ 时有 $f(x) > 0$,

根据图象可知,

若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则有 $0 < x_1 < 1 < x_2$; 7分

要证 $x_1 e^{x_1} > e$, 只需证 $x_2 > 1 - \ln x_1$; 8分

又因为 $0 < x_1 < 1$, 所以 $1 - \ln x_1 > 1$;

因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 从而只需证明 $f(x_1) = f(x_2) < f(1 - \ln x_1)$,

只需证 $x_1 e^{-x_1} < (1 - \ln x_1) e^{1 - \ln x_1} = \frac{(1 - \ln x_1)}{e} e^{1 - \ln x_1} = \frac{x_1}{e} (1 - \ln x_1)$.

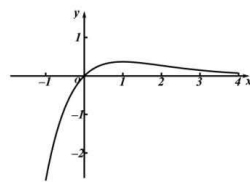
只需证 $e^{-x_1} + \ln x_1 < 1, (0 < x_1 < 1)$ 10分

设 $h(t) = e^{-t} + \ln t, (t \in (0, 1))$, 则 $h'(t) = \frac{1 - te^{-t}}{t}$.

由 $f(x)$ 的单调性可知, $f(t) \leq f(1) = \frac{1}{e}$. 则 $te^{-t} \leq \frac{1}{e}$, 即 $1 - te^{-t} \geq 0$.

所以 $h'(t) > 0$, 即 $h(t)$ 在 $t \in (0, 1)$ 上单调递增. 所以 $h(t) < h(1) = 1$.

从而不等式 $x_1 e^{x_1} > e$ 得证. 12分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

