湘豫名校2020届高三年级12月份联考

数学(理科)参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	B	A	C	B	C	C	D	A	C	D

1.D 【解析】解一元二次不等式化简集合 A，得 $A=\{x\mid -1<x<3\}$，所以 $\complement_U A=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$，又 $B=\{x\mid x>1\}$，所以 $(\complement_U A)\cap B=\{x\mid x\geqslant 3\}$. 故选 D.

2.C 【解析】$\because z=\mathrm{i}^{2019}(-1-2\mathrm{i})=-\mathrm{i}(-1-2\mathrm{i})=-2+\mathrm{i}$，$\therefore \bar{z}=-2-\mathrm{i}$，故选 C.

3.B 【解析】$\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)^n$ 的展开式中只有第六项的二项式系数最大，$\therefore$ 展开式中共有 11 项，$n=10$；$\therefore$ 令 $x=1$，则展开式中各项系数和为 $(1-2)^{10}=1$. 故选 B.

4.A 【解析】$a=(\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}=3^{\frac{1}{3}}>3^0=1$，且 $3^{\frac{1}{3}}<8^{\frac{1}{3}}=2^{3\times\frac{1}{3}}=2$，$\therefore 1<a<2$.
$b=\log_3 e<\log_3 3=1$，$c=e^{\log_2 3}>e^{\log_2 2}=e>2$，故 $c>a>b$，选 A.

5.C 【解析】因为阳数为：1，3，5，7，9；阴数为：2，4，6，8，10，所以从阴数和阳数中各取一数的所有组合共有：$5\times5=25$ 个，满足差的绝对值为 3 的有：(1，4)，(3，6)，(5，2)，(5，8)，(7，10)，(7，4)，(9，6) 共 7 个，则 $p=\dfrac{7}{25}$. 故选 C.

6.B 【解析】因为 $a_1=b_1=2$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，则 $a_n=2n$，$b_n=2^n$，所以 $b_{a_n}=2^{2n}=4^n$，故 $\{b_{a_n}\}$ 是首项为 4，公比为 4 的等比数列，可得前 n 项和为 $\dfrac{4\cdot(1-4^n)}{1-4}=\dfrac{4}{3}(4^n-1)$，故选 B.

7.C 【解析】第一次循环：$S=1$，不满足条件，$i=2$；
第二次循环：$S=3$，不满足条件，$i=3$；
第三次循环：$S=6$，不满足条件，$i=4$；
第四次循环：$S=10$，不满足条件，$i=5$；
第五次循环：$S=15$，满足条件，输出的值为 5.
以判断框中的条件可填写"$S\geqslant15$?". 故选 C.

8.C 【解析】$f(x)=\sin(2x-2\varphi)$，令 $2x-2\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}+\varphi$，$k\in\mathbf{Z}$.

故 y 轴右侧的第一条对称轴为 $x=\varphi+\dfrac{\pi}{4}$，左侧第一条对称轴为 $x=\varphi-\dfrac{\pi}{4}$，

所以 $\begin{cases}\varphi+\dfrac{\pi}{4}\geqslant\dfrac{\pi}{3},\\ \varphi-\dfrac{\pi}{4}\leqslant 0,\end{cases}$ 所以 $\dfrac{\pi}{12}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$. 令 $f(x)=0$，则 $2x-2\varphi=k\pi$，故 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\varphi$，$k\in\mathbf{Z}$，

最大的负零点为 $x=\varphi-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $-\dfrac{5\pi}{12}<\varphi-\dfrac{\pi}{2}<-\dfrac{\pi}{12}$，$\therefore\dfrac{\pi}{12}<\varphi<\dfrac{5\pi}{12}$，综上，$\dfrac{\pi}{12}<\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，故选 C.

9.D 【解析】由已知可得 $\angle AOB=60^\circ$，则 $\angle ABO=105^\circ$. 又 $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\sin 105^\circ=\sin(45^\circ+60^\circ)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. 不妨设 $OA=4$，则由正弦定理可得 $OB=$

$\dfrac{OA\cdot\sin 15^\circ}{\sin 105^\circ}=\dfrac{4\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=8-4\sqrt{3}$，则 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\times 4\times(8-4\sqrt{3})\times\sin 60^\circ=8\sqrt{3}-12$，

所以阴影部分的面积为 $S'=3S_{\triangle AOB}=24\sqrt{3}-36$，圆 O 的面积为 $S=16\pi$，

则在圆内任取一点，则此点取自阴影部分的概率为 $P=\dfrac{S'}{S}=\dfrac{24\sqrt{3}-36}{16\pi}=\dfrac{6\sqrt{3}-9}{4\pi}$. 故选 D.

10. A 【解析】∵ $F_n=2^{2^n}+1(n=0,1,2,\cdots)$，∴ $a_n=\log_2(F_n-1)=2^n$，∴ $S_n=\dfrac{2\times(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，

而 $\dfrac{2^{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{2^{n+1}}{(2^{n+1}-2)(2^{n+2}-2)}=\dfrac{1}{2^{n+1}-2}-\dfrac{1}{2^{n+2}-2}$，

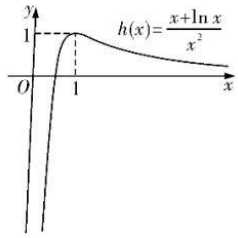
$\therefore\dfrac{2^2}{S_1S_2}+\dfrac{2^3}{S_2S_3}+\cdots+\dfrac{2^{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{1}{2^2-2}-\dfrac{1}{2^3-2}+\dfrac{1}{2^3-2}-\dfrac{1}{2^4-2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+1}-2}-\dfrac{1}{2^{n+2}-2}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+2}-2}$，

$\therefore\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+2}-2}<\dfrac{63}{127}$，$\therefore\dfrac{1}{2^{n+2}-2}>\dfrac{1}{254}$，即 $2^{n+2}<256$，即 $n<6$，∴ $n=5$. 故选 A.

11. C 【解析】由题意，可得∵ $EF/\!/AB$，∴ P 到 BC 的距离等于 $\triangle ABC$ 的 BC 边上高的 $\dfrac{1}{3}$，可得 $S_1=\dfrac{1}{3}S$，则 $S_2+S_3=\dfrac{2}{3}S$，$\lambda_2+\lambda_3=\dfrac{2}{3}$. 由此可得 $\lambda_2\cdot\lambda_3\leqslant\left(\dfrac{\lambda_2+\lambda_3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{9}$，当且仅当 $\lambda_2=\lambda_3=\dfrac{1}{3}$，即 $S_2=S_3$ 时，即 P 为 EF 的中点时，等号成立. ∴若延长 AP 交 BC 于点 D，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FC}$，则 D 为 BC 的中点，故 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$，∴ $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$. 由已知得 $\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{PB}+y\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，∴根据平面向量基本定理，得 $x=y=1$. 所以当 $\lambda_2\cdot\lambda_3$ 取到最大值时，x,y 的值分别为 1，1，故选 C.

12. D 【解析】由 $f(x)=\dfrac{1}{2}f'(1)e^{2x-2}+x^2-2f(0)x$，



得 $f'(x)=f'(1)e^{2x-2}+2x-2f(0)$，

令 $x=1$，得 $f'(1)=f'(1)+2-2f(0)$，故 $f(0)=1$.

又 $f(0)=\dfrac{1}{2}f'(1)e^{-2}$，则 $f'(1)=2e^2$，$f(x)=e^{2x}+x^2-2x$，

$\therefore g(x)=\sqrt{f(x)-x^2+2x}=e^x$.

$\because g\left(\dfrac{x^2}{a}-x\right)-x=0$，$\therefore e^{\left(\frac{x^2}{a}-x\right)}=x$，

$\therefore\dfrac{x^2}{a}-x=\ln x$，可得 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$.

构造函数 $h(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}(x>0)$，

则 $h'(x)=\dfrac{1-x-2\ln x}{x^3}$，令 $h'(x)=0$，则 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，所以函数 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值 1.

作出函数 $h(x)$ 的图象可知：当 $0<\dfrac{1}{a}<1$，即 $a>1$ 时，直线 $y=\dfrac{1}{a}$ 与函数 $h(x)$ 有两个交点，此时方程有两个实数解. 故 $a\in(1,+\infty)$，故选 D.

二、填空题

13. -2 【解析】∵ $f(x)$ 是奇函数，

∴ $g(-2)=f(-2)=-f(2)=-(\log_2 2-3)=2$，

则 $f(2)=1-3=-2$，故 $f(g(-2))=-2$.

14. 1 【解析】∵函数 $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+a$，∴ $f(x)$ 关于点 $\left(\dfrac{1}{2},a\right)$ 成中心对称，

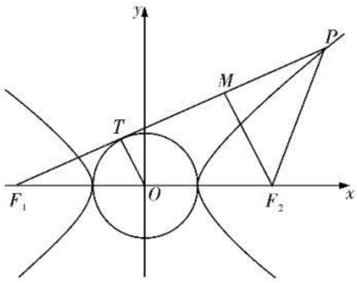
则 $f(x)+f(1-x)=2a$，则由 $f(0)+f\left(\frac{1}{2020}\right)+f\left(\frac{2}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{2019}{2020}\right)+f(1)=2021$，

得 $f(1)+f\left(\frac{2019}{2020}\right)+f\left(\frac{2018}{2020}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2020}\right)+f(0)=2021$，

两式相加得 $2021\times[f(0)+f(1)]=2021\times2$，

即 $2021\times2a=2021\times2$，$\therefore a=1$.

15. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 【解析】如图，由题可知 $|OF_1|=|OF_2|=c$，$|OT|=a$，则 $|F_1T|=b$，又 $\overrightarrow{F_1P}=3\overrightarrow{F_1T}$，



$\therefore |TP|=2b$，$|F_1P|=3b$，又 $\because |PF_1|-|PF_2|=2a$，$|PF_2|=3b-2a$，作 $F_2M\parallel OT$，可得 $|F_2M|=2a$，$|TM|=b$，则 $|PM|=b$，在 $\triangle MPF_2$ 中，$|PM|^2+|MF_2|^2=|PF_2|^2$，

即 $b^2+(2a)^2=(3b-2a)^2$，

得 $2b=3a$，又 $\because c^2=a^2+b^2$，化简可得 $4c^2=13a^2$，

$\therefore e=\frac{\sqrt{13}}{2}$，双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

16. $\frac{37\sqrt{5}+90}{120}\pi$ 【解析】由题意知，此曲线实质是以 A 点为球心，$\frac{\sqrt{5}}{2}$ 为半径的球在正方体表面的交线，正方体的各个面根据与球心位置关系分成两类，第一类是：$ABCD$，AA_1D_1D，AA_1B_1B 为过球心 A 的截面，截痕为大圆弧，圆弧半径为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，设各圆弧圆心角为 α，则 $\cos\alpha=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{4}{5}$，$\therefore \alpha=37^\circ=\frac{37\pi}{180}$，此时三个面上的大圆弧长和为 $3\times\frac{37\pi}{180}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{37\sqrt{5}\pi}{120}$；第二类是：$A_1B_1C_1D_1$，$B_1BCC_1$，$D_1DCC_1$ 为与球心距离为 1 的截面，截痕为小圆弧，圆弧半径为 $\frac{1}{2}$，圆心角为 $\frac{\pi}{2}$，此时这三个截痕长度和为 $3\times\frac{1}{4}\times2\pi\times\frac{1}{2}=\frac{3\pi}{4}$，

故这条曲线的总长为 $\frac{37\sqrt{5}\pi}{120}+\frac{3\pi}{4}=\frac{37\sqrt{5}+90}{120}\pi$.

三、解答题

17.【解析】(1) 由题意 $\sin^2A+\sin^2C-\sin A\sin C=\sin^2B$，

由正弦定理得 $a^2+c^2-ac=b^2$，…………（2 分）

$\therefore a^2+c^2-b^2=ac$，$\therefore \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，即 $\cos B=\frac{1}{2}$，…………（4 分）

又 $\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$. …………（6 分）

(2) 由 (1) 知 $B=\frac{\pi}{3}$，且外接圆的半径为 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$，由正弦定理可得 $\dfrac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\times\frac{5\sqrt{3}}{3}$，

解得 $b=5$. …………（7 分）

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=2\times\frac{5\sqrt{3}}{3}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$，可得 $a+c=\frac{10\sqrt{3}}{3}(\sin A+\sin C)$，…………（8 分）

又 $A+C=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore a+c=\frac{10\sqrt{3}}{3}\left[\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\right]=\frac{10\sqrt{3}}{3}\times\left(\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=10\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，…………（10 分）

∵△ABC为锐角三角形，∴$0<A<\frac{\pi}{2}$且$0<C<\frac{\pi}{2}$，又$C=\frac{2\pi}{3}-A$，得$\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$.

∴$\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$. ……（11分）

∴$a+c\in(5\sqrt{3},10]$，故△ABC的周长的取值范围是$(5+5\sqrt{3},15]$. ……（12分）

18.【解析】(1)∵△AOB为直角三角形，且斜边为AB，∴$\angle AOB=\frac{\pi}{2}$. ……（1分）

将Rt△AOB以直线AO为轴旋转得到Rt△AOC，则$\angle AOC=\frac{\pi}{2}$，即$OC\perp AO$， ……（2分）

∵$OB\cap OC=O$，$OB\subset$平面BOC，$OC\subset$平面BOC，∴$AO\perp$平面BOC. ……（4分）

又∵$AO\subset$平面AOB，∴平面$BOC\perp$平面AOB. ……（5分）

(2)在Rt△AOB中，$\angle OAB=\frac{\pi}{6}$，斜边$AB=4$，∴$OB=\frac{1}{2}AB=2$，且$OC=2$，……（6分）

又二面角$B-AO-C$为120°，则$\angle COB=120°$， ……（7分）

以CO为x轴，OA为z轴，CB上取一点E使得$\angle COE=90°$，即以OE为y轴建立空间直角坐标系. ……（8分）

∴$A(0,0,2\sqrt{3})$，$O(0,0,0)$，$B(-1,\sqrt{3},0)$，$C(2,0,0)$，

∵$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(-1,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$，∴$D\left(-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$. ……（9分）

∴$\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{7}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$，

设平面AOB的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，∴$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OB}=0$， ……（10分）

∴$\begin{cases}(x,y,z)\cdot(0,0,2\sqrt{3})=0,\\(x,y,z)\cdot(-1,\sqrt{3},0)=0,\end{cases}$ ∴有$\begin{cases}z=0,\\-x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$

令$y=1$，则$x=\sqrt{3}$，$z=0$，∴$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,0)$. ……（11分）

设直线CD与平面AOB所成的角为α，则$\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CD}\rangle|=\frac{3\sqrt{3}}{10}$.

即直线CD与平面AOB所成角的正弦值为$\frac{3\sqrt{3}}{10}$. ……（12分）

19.【解析】(1)因为椭圆C：$\frac{x^2}{4t^2}+\frac{y^2}{3t^2}=1$，所以$a^2=4t^2$，$b^2=3t^2$，$c^2=t^2$， ……（2分）

又$t>0$，所以$a=2t$，$c=t$，所以椭圆C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. ……（4分）

(2)直线AP的方程为$y=k(x+2)$，将$x=2$代入$y=k(x+2)$得$y=4k$，

所以$Q(2,4k)$. ……（5分）

因为E为线段BQ的中点，所以$E(2,2k)$，因为焦点F的坐标为$(1,0)$，

所以直线EF的斜率$k_{EF}=2k$， ……（6分）

联立$\begin{cases}y=k(x+2),\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去y得$(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$， ……（7分）

由$x_Ax_P=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$，且$x_A=-2$，∴$x_P=\frac{6-8k^2}{3+4k^2}$， ……（8分）

所以点P的坐标为$\left(\frac{6-8k^2}{3+4k^2},\frac{12k}{3+4k^2}\right)$. ……（9分）

所以直线 PF 的斜率 $k_{PF}=\dfrac{\dfrac{12k}{3+4k^2}}{\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2}-1}=\dfrac{4k}{1-4k^2}=\dfrac{2\times 2k}{1-(2k)^2}$，…………………………………（10 分）

而直线 EF 的斜率为 $2k$，若设 $\angle EFB=\theta$，则有 $\tan\angle PFB=\tan 2\theta$，

即 $\angle PFB=2\angle EFB$. ……………………………………………………………………（11 分）

所以点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 PF 上. ……………………………………………（12 分）

20.【解析】(1)依题意，完善表格如下：

	合格	不合格	总计
博士学位论文	150	50	200
硕士学位论文	50	50	100
总计	200	100	300

……………………………………………………………………………………………（1 分）

算得观测值为 $K^2=\dfrac{300\times(150\times 50-50\times 50)^2}{200\times 100\times 200\times 100}=\dfrac{300\times 5000\times 5000}{200\times 100\times 200\times 100}=18.75>10.828$. …………（3 分）

故有 99.9%的把握认为学位论文是否合格与作者学位高低有关系. ………………………………（4 分）

(2)因为一篇学位论文初评被认定为“存在问题学位论文”的概率为 $C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{2}$； ……………………………………………………………………………（6 分）

一篇学位论文复评被认定为“存在问题学位论文”的概率为 $C_3^1p(1-p)^2[1-(1-p)^2]=3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]=\dfrac{9}{32}$. ……………………………………………………………………（7 分）

所以一篇学位论文被认定为“存在问题学位论文”的概率为 $p_0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{32}=\dfrac{25}{32}$. ……………………（8 分）

(3)设每篇学位论文的评审费为 X 元，则 X 的可能取值为 900，1500.

$P(X=1500)=C_3^1p(1-p)^2$，$P(X=900)=1-C_3^1p(1-p)^2$，

所以 $E(X)=900\times[1-C_3^1p(1-p)^2]+1500\times C_3^1p(1-p)^2=900+1800p(1-p)^2$，…………………（9 分）

令 $g(p)=p(1-p)^2$，$p\in(0,1)$，则 $g'(p)=(1-p)^2-2p(1-p)=(3p-1)(p-1)$，………………（10 分）

当 $p\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 时，$g'(p)>0$，$g(p)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 上单调递增；当 $p\in\left(\dfrac{1}{3},1\right)$ 时，$g'(p)<0$，$g(p)$ 在 $\left(\dfrac{1}{3},1\right)$ 上单调递减，所以 $g(p)$ 的最大值为 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$. ………………………………………………………（11 分）

所以实施此方案，最高费用为 $100+6000\times\left(900+1800\times\dfrac{4}{27}\right)\times 10^{-4}=800$（万元）.

综上，若以此方案实施，不会超过预算. ………………………………………………………（12 分）

21.【解析】(1)由 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}ax^2+1$，得 $f'(x)=e^x-ax$，…………………………………………（1 分）

由题意知函数 $f(x)$ 有两个极值点，∴ $f'(x)=0$ 有两个不等的实数解. ………………………（2 分）

即方程 $a=\dfrac{e^x}{x}(x\neq 0)$ 有两个不等的实数解.

设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}(x\neq 0)$，则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，……………………………………………………（3 分）

∴ $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$(0,1)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增，………………………（4 分）

作出函数图象知当 $a>e$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 有两个交点，……………………………………（5 分）

当且仅当 $a>e$ 时 $f(x)$ 有两个极值点，综上所述，$a>e$. ……………………………………………………（6分）

(2)因为 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个极值点，$x_1\neq x_2$，

$\therefore e^{x_1}-ax_1=0,e^{x_2}-ax_2=0,\therefore a=\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$，……………………………………………………（7分）

故要证 $\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln a$，即证 $e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<a$，即证 $e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$，即证 $e^{\frac{x_1-x_2}{2}}<\dfrac{e^{x_1-x_2}-1}{x_1-x_2}$，…………（8分）

不妨设 $x_1<x_2$，$\dfrac{x_1-x_2}{2}=t<0$，即证 $e^t<\dfrac{e^{2t}-1}{2t}$，即证 $2te^t-e^{2t}+1>0$，……………………………（9分）

设 $F(t)=2te^t-e^{2t}+1(t<0)$，则 $F'(t)=2e^t(t+1-e^t)$，……………………………………………（10分）

易证 $t+1<e^t$，$\therefore F'(t)<0$，所以 $F(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减，$\therefore F(t)>F(0)=0$，………………………（11分）

得证 $2te^t-e^{2t}+1>0$. 综上所述：$\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln a$ 成立. ……………………………………………（12分）

22.【解析】(1)由 $\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\cos\alpha,\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数)得曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=3$. ……………………（2分）

由直线 l 的方程为 $x+\sqrt{3}y-2=0$，得极坐标方程 $\sqrt{3}\rho\sin\theta+\rho\cos\theta-2=0$，

即 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$. ……………………………………………………………………………（4分）

(2)曲线 C 的极坐标方程是 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2=0$，………………………………………………………（6分）

把 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入曲线 C 的极坐标方程得 $\rho^2-\rho-2=0$，解之得 $\rho=2$ 或 $\rho=-1$(舍)，……………………（8分）

把 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入直线 l 的极坐标方程得 $\rho=1$，……………………………………………………………（9分）

所以 $MN=|2-1|=1$. ……………………………………………………………………………（10分）

23.【解析】(1) $|x-m|+2x\leqslant 0$，即 $\begin{cases}x\geqslant m,\\ x-m+2x\leqslant 0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<m,\\ m-x+2x\leqslant 0,\end{cases}$ ……………………………（2分）

化简得：$\begin{cases}x\geqslant m,\\ x\leqslant\dfrac{m}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<m,\\ x\leqslant -m,\end{cases}$ 由于 $m>0$，所以不等式组的解集为 $(-\infty,-m]$，…………………………（4分）

由题设可得 $-m=-1$，故 $m=1$. ……………………………………………………………………（5分）

(2)由(1)可知，$a+b+c=1$，……………………………………………………………………（6分）

又由均值不等式有：$\dfrac{b^2}{a}+a\geqslant 2b,\dfrac{c^2}{b}+b\geqslant 2c,\dfrac{a^2}{c}+c\geqslant 2a$，…………………………………………（8分）

三式相加可得：$\dfrac{b^2}{a}+a+\dfrac{c^2}{b}+b+\dfrac{a^2}{c}+c\geqslant 2b+2c+2a$，……………………………………（9分）

所以 $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{b}+\dfrac{a^2}{c}\geqslant a+b+c=1$. ………………………………………………………（10分）

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2020 届高三上学期期中考试试题及答案汇总（更新下载中），点击链接获得 http://www.zizzs.com/c/201911/40242.html