2024届高三一轮复习联考

数学参考答案及评分意见

1.C 【解析】由题意可得 $A=\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$，又 $B=\{-4,-3,-1,1,3,4\}$，则 $A\cap B=\{-4,-3,-1,3,4\}$. 故选 C.

2.A 【解析】不等式 $\frac{x-1}{x+2}\leqslant 0$ 等价于 $\begin{cases}(x-1)(x+2)\leqslant 0,\\ x+2\neq 0,\end{cases}$ 解得 $-2<x\leqslant 1$，因为 $(-2,1]\subsetneqq[-2,1]$，故 p 是 q 的充分不必要条件.故选 A.

3.B 【解析】$\because \lg(ab)=0$，$\therefore ab=1$.又 $\because a,b$ 为不相等的两个正数，$\therefore b=\frac{1}{a}$，则 $y=b^x=a^{-x}$.$\because$ 函数 $y=a^x$ 和 $y=a^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称，$\therefore$ 函数 $y=a^x$ 和 $y=b^x$ 的图象关于 y 轴对称.故选 B.

4.D 【解析】设角 α 所在的扇形的半径为 r，面积为 S，则由题意可得 $\frac{S}{r^2}=\frac{\frac{1}{2}r^2\alpha}{r^2}=\frac{5\pi}{12}$，解得 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$，所以 $\sin\alpha=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$，故选 D.

5.A 【解析】$\frac{\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin^2(-\pi-\alpha)}=\frac{\cos\left[6\pi-\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin\left[4\pi+\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right]}{[-\sin(\alpha+\pi)]^2}=\frac{\cos\left[-\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2(\pi+\alpha)}$，又因为 $\cos\left[-\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$，$\sin^2(\pi+\alpha)=\sin^2\alpha$，故原式 $=\frac{-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=-\frac{1}{\tan\alpha}$.又 $f(x)=a^{x-2}+2$ 的图象过定点 $P(2,3)$，所以 $\tan\alpha=\frac{3}{2}$，因此 $-\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{2}{3}$.故选 A.

6.C 【解析】由题意得 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，则 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=-1$，所以 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\varphi\right)=\sin\left[\pi+\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\right]=-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$.故选 C.

7.D 【解析】$\because 3a=6\log_3 2=\log_3 64<\log_3 81=4$，$3b=3\log_2 3=\log_2 27>\log_2 16=4$，又 $3c=4$，$\therefore 3a<3c<3b$，即 $b>c>a$.故选 D.

8.C 【解析】已知 $x\in(0,+\infty)$，由 $mx>0$ 知 $m>0$，故排除 B、D.由 $e^x-\ln(mx)+(1-m)x\geqslant 0$，得 $e^x+x\geqslant e^{\ln(mx)}+\ln(mx)$ (*).构造函数 $f(x)=e^x+x$，则 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则由(*)可得 $f(x)\geqslant f(\ln(mx))$，因此 $x\geqslant \ln(mx)$，即 $e^x\geqslant e^{\ln mx}$，$m\leqslant\frac{e^x}{x}$.令 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，$g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，由 $g'(x)=0$，得 $x=1$.当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增，$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=e$，则 $m\leqslant e$.又 $m>0$，则 $0<m\leqslant e$.故选 C.

9.ACD 【解析】A 选项，$a>0,b>0,ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 A 正确；B 选项，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=4$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$ 时，即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 B 错误；C 选项，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=1+2\sqrt{ab}\leqslant 1+a+b=2$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立，所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$，故

C 正确；D 选项，$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab\geqslant 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 D 正确.故选 ACD.

10.ACD 【解析】对于 A，若不改变信噪比 $\frac{S}{N}$，而将信道带宽 W 增加一倍，即 $2W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)=2C$，则 C 增加一倍，所以 A 正确；对于 B，若不改变信道带宽 W 和信道内信号的平均功率 S，而将高斯噪声功率 N 降低为原来的一半，即 $W\log_2\left(1+\frac{S}{\frac{N}{2}}\right)=W\log_2\left(1+\frac{2S}{N}\right)\neq W\log_2\left[1+\frac{2S}{N}+\left(\frac{S}{N}\right)^2\right]=2W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$，所以 B 错误；对于 C，若不改变带宽 W，而将信噪比 $\frac{S}{N}$ 从 255 提升至 1 023，则 $\frac{W\log_2(1+1\,023)}{W\log_2(1+255)}-1=\frac{\log_2 2^{10}}{\log_2 2^8}-1=\frac{10}{8}-1=\frac{1}{4}$，所以 C 增加了 25%，所以 C 正确；对于 D，若不改变带宽 W，而将信噪比 $\frac{S}{N}$ 从 999 提升至 4 999，则 $\frac{W\log_2(1+4\,999)}{W\log_2(1+999)}-1=\frac{\log_2 5\,000}{\log_2 1\,000}-1=\frac{\lg 5\,000}{\lg 1\,000}-1=\frac{\lg 5+\lg 1\,000}{3}-1=\frac{\lg 5}{3}\approx 0.233$，所以 D 正确.故选 ACD.

11.AD 【解析】由已知，$x<1$ 时，$f'(x)\leqslant 0$（只有 $f'(-1)=0$），因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，A 正确；-1 不是 $f'(x)$ 的变号零点，故 $f(-1)$ 不是极值，B 错误；由 $f'(-1)=0$ 知 C 错误；又 $x<2$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 递减，$x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，所以 $f(2)$ 是极小值，D 正确.故选 AD.

12.ABD 【解析】$\because f(x)=-f(4-x)$，$\therefore f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 中心对称.$\because f(x+2)$ 是将 $f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位长度，$\therefore f(x+2)$ 关于点 $(0,0)$ 中心对称，故 $f(x+2)$ 为奇函数，故 C 错误；又 $\because f(x+1)=f(1-x)$，$\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，故 B 正确；由 $f(x+1)=f(1-x)$ 知，$f(x)=f(2-x)$，由 $f(x)=-f(4-x)$ 知，$f(2-x)=-f(x+2)$，$\therefore f(x+2)=-f(x)$，$\therefore f[(x+2)+2]=-f(x+2)=f(x)$，即 $f(x)=f(x+4)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，故 D 正确；又 $f(x)=-f(4-x)$，令 $x=2$，则 $f(2)=-f(2)$，所以 $f(2)=0$，故 A 正确.故选 ABD.

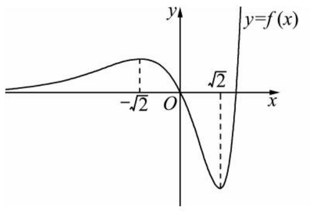
13.$\frac{7}{9}$ 【解析】根据二倍角公式，得 $\cos 2x=1-2\sin^2 x=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.故答案为 $\frac{7}{9}$.

14.$\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{a}<x<1\right\}$ 【解析】由于 $a>0$，故原不等式等价于 $a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$，当 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}<1$，不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{a}<x<1\right\}$.故答案为 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{a}<x<1\right\}$.

15.$\frac{4\pi}{3}$ 【解析】由图可得函数图象过点 $\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$，将它代入函数 $f(x)$，可得 $\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$，又 $\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$ 是函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴负半轴的第一个交点，所以 $-\frac{4\pi}{9}\cdot\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，解得 $\omega=\frac{3}{2}$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$.故答案为 $\frac{4\pi}{3}$.

16.$\left(0,\frac{1}{e}\right]$ 【解析】因为 $f(x)=(x^2-2x)e^x$，所以 $f'(x)=(x^2-2)e^x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\sqrt{2}$ 或 $x=\sqrt{2}$，令 $f'(x)>0$，得 $x<-\sqrt{2}$ 或 $x>\sqrt{2}$，令 $f'(x)<0$，得 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{2})$ 上单调递增，在 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递增，又因为 $f(-\sqrt{2})=\frac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$，$f(\sqrt{2})=(2-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$，当 x 趋近

于负无穷时,$f(x)$趋近于零,所以 $f(x)$的图象如图所示.



所以若方程 $f(x)=a$ 有3个不同的实根,则 $a\in\left(0,\frac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$.又因为 $f(x_2)=(x_2^2-2x_2)e^{x_2}=a$, $x_2\in(-\sqrt{2},0)$,所以$\frac{a}{2-x_2}=\frac{(x_2^2-2x_2)e^{x_2}}{2-x_2}=-x_2e^{x_2}$.不妨令 $h(x)=xe^x$, $x\in(-\sqrt{2},0)$,则 $h'(x)=e^x(x+1)$,令 $h'(x)<0$,得$-\sqrt{2}<x<-1$,令 $h'(x)>0$,得$-1<x<0$,所以 $h(x)$在$(-\sqrt{2},-1)$上单调递减,在$(-1,0)$上单调递增,所以$h(x)_{\min}=h(-1)=-\frac{1}{e}$.又因为 $h(-\sqrt{2})=-\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$, $h(0)=0$,所以$-\frac{1}{e}\leqslant h(x)<0$,所以$\frac{a}{2-x_2}\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$.故答案为$\left(0,\frac{1}{e}\right]$.

17.**解**:由题意知,命题 p:对于任意 $x\in[1,2]$,都有 $x^2-a\geqslant0$,

若命题 p 为真,则对于任意 $x\in[1,2]$,都有 $a\leqslant(x^2)_{\min}=1$,即 $a\leqslant1$. ………………………… 2分

命题 q:存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2+2ax+2-a=0$.

若命题 q 为真,则方程 $x^2+2ax+2-a=0$ 有解. ………………………………………… 4分

则有 $\Delta=4a^2-4(2-a)\geqslant0$,即 $a^2+a-2\geqslant0$,解得 $a\geqslant1$ 或 $a\leqslant-2$. ………………………… 6分

若 p 与 q 都是真命题,则 $a\leqslant-2$ 或 $a=1$. ………………………………………… 8分

所以若 p 与 q 中至少有一个是假命题,实数 a 的取值范围是$\{a|a>-2$ 且 $a\neq1\}$ ……………… 10分

18.**解**:(1)因为 $f(x)$的最小正周期为 π,所以$\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$. ………………………………………… 1分

又 $\omega>0$,所以 $\omega=2$. ………………………………………………………………… 2分

因为 $f(x)$的最大值为2,所以$|A|=2$.

又 $A>0$,所以 $A=2$,所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

因为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$,所以 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$. ………………………………… 3分

又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. ……………………………………………………………… 5分

(2)因为函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$, ……………………………… 7分

所以由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$. ……………………… 9分

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$. ………………………………… 12分

19.**解**:(1)$\because x>0$,$\therefore f(x)=2-3x-\frac{4}{x}=2-\left(3x+\frac{4}{x}\right)\leqslant 2-2\sqrt{3x\cdot\frac{4}{x}}=2-4\sqrt{3}$, …… 2分

当且仅当 $3x=\frac{4}{x}$,即 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时取得最大值, …… 3分

所以 $f(x)$ 的最大值为 $2-4\sqrt{3}$. …… 5分

(2)①若 $x>0$,且 $f(x)>-6$,$\therefore 2-3x-\frac{4}{x}>-6$, …… 6分

$\therefore 2x-3x^2-4>-6x$,即 $3x^2-8x+4<0$,$\therefore (x-2)(3x-2)<0$,解得 $\frac{2}{3}<x<2$; …… 8分

②若 $x<0$,$f(x)=2-3x-\frac{4}{x}>0>-6$ 恒成立,即 $f(x)>-6$ 的解集为 $\{x\mid x<0\}$. …… 10分

综合①②,得不等式 $f(x)>-6$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<0\text{ 或 }\frac{2}{3}<x<2\right\}$. …… 12分

20.**解**:(1)任取 $x_1,x_2\in(2,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2-4}-\frac{x_2}{x_2^2-4}=\frac{x_1(x_2^2-4)-x_2(x_1^2-4)}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)}=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2+4)}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)}$. …… 2分

$\because x_2>x_1>2$,

$\therefore x_2-x_1>0$,$x_1x_2+4>0$,$(x_1^2-4)(x_2^2-4)>0$, …… 4分

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$,即 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减. …… 5分

(2)因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$,关于原点对称, …… 6分

且 $f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-4}=\frac{-x}{x^2-4}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数. …… 8分

又由(1)知 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上也单调递减, …… 10分

所以在区间 $[-6,-3]$ 上,$f(x)_{\max}=f(-6)=-\frac{3}{16}$,$f(x)_{\min}=f(-3)=-\frac{3}{5}$. …… 12分

21.**解**:(1)因为 $f(x)=\log_2(2^x+1)+ax$ 是偶函数,

所以 $f(-x)-f(x)=0$,即 $\log_2(2^{-x}+1)-ax-\log_2(2^x+1)-ax=0$, …… 3分

即 $2ax=\log_2(2^{-x}+1)-\log_2(2^x+1)=\log_2\frac{2^{-x}+1}{2^x+1}=\log_2\frac{2^{-x}(1+2^x)}{(1+2^x)}=\log_2 2^{-x}=-x$,所以 $a=-\frac{1}{2}$. …… 5分

(2)因为对任意的 $x_1\in[0,4]$,存在 $x_2\in[0,5]$,使得 $g(x_1)\geqslant h(x_2)$,

所以 $g(x)$ 在 $[0,4]$ 上的最小值不小于 $h(x)$ 在 $[0,5]$ 上的最小值,即 $g(x)_{\min}\geqslant h(x)_{\min}$. …… 7分

因为 $g(x)=\log_2(2^x+1)+\frac{1}{2}x$ 在 $[0,4]$ 上单调递增,所以 $g(x)_{\min}=g(0)=1$.

$h(x)=x^2-2x+m$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,5)$ 上单调递增,

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=m-1$, …… 10分

所以 $1\geqslant m-1$,解得 $m\leqslant 2$,即 m 的取值范围是 $(-\infty,2]$. …… 12分

22.(1)**解**:$f'(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$,显然有 $f'(\mathrm{e})=0$,当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减. …… 3分

因此 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,\mathrm{e})$，单调递减区间是 $(\mathrm{e},+\infty)$. …………………………………… 4 分

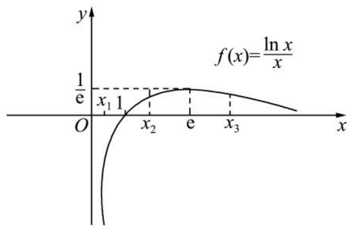
(2)**解**：由 $\frac{\ln x}{ax}\leqslant x-\frac{1}{a}$，得 $ax^2-x-\ln x\geqslant 0$，$a\geqslant\frac{x+\ln x}{x^2}$.

令 $g(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$，则有 $g'(x)=\frac{-x-2\ln x+1}{x^3}$，…………………………………… 5 分

令 $k(x)=-x-2\ln x+1$，显然 $k(x)$ 是减函数，且 $k(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$k(x)>0$，即 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$x\in(1,+\infty)$ 时，$k(x)<0$，即 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减. …………………………………… 7 分

$\therefore$ $g(x)_{\max}=g(1)=1$，因此 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$. …………………………………… 8 分

(3)**证明**：当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，由(1)的结论作函数图象如下：



故 $f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

对于 $x_1\ln x_2+x_2\ln x_1=0$，得 $-\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}$，不妨设 $x_2>x_1$，则有 $-f(x_1)=f(x_2)$，

由图可知当 $0<f(x)<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，对应的自变量有 2 个值 x_2,x_3，其中 $x_3>\mathrm{e}$，$1<x_2<\mathrm{e}$，

要证明 $x_1+x_2>2$，x_2 只需取 x_2,x_3 中较小的数即可.

$\because 0<f(x_2)<\frac{1}{\mathrm{e}}$，$\therefore -\frac{1}{\mathrm{e}}<f(x_1)<0$，$x_1\in(0,1)$，$2-x_1\in(1,2)$.

要证明 $x_1+x_2>2$，只需证明 $x_2>2-x_1$，在 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore$ 只需证明 $f(x_2)>f(2-x_1)$，$\because f(x_2)=-f(x_1)$，$\therefore$ 只需证明 $-f(x_1)>f(2-x_1)$，

即证 $f(x_1)+f(2-x_1)<0$. 构造函数 $p(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln(2-x)}{2-x}(x\in(0,1))$，

则 $p'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{-1+\ln(2-x)}{(2-x)^2}=\frac{x^2\ln(2-x)-(2-x)^2\ln x+4(1-x)}{x^2(2-x)^2}$.

$\because x\in(0,1)$，$\therefore 2-x\in(1,2)$，$x^2\ln(2-x)>0$，$-(2-x)^2\ln x>0$，$4(1-x)>0$，

$\therefore p'(x)>0$，$p(x)$ 是增函数，又 $p(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$p(x)<0$，

即 $f(x_1)+f(2-x_1)<0$，命题得证. …………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。