学校：______ 班级：______ 部______班______姓名：______ 考号：______ 座号：______

试卷类型：A

山东新高考联合质量测评 10 月联考试题

高　三　数　学

2023. 10

考试用时 120 分钟，满分 150 分

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的学校、班级、姓名、考号、座号填涂在相应位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x|x^2+2x-8\geqslant 0\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\{-2,2\}$　　B. $\{-2\}$　　C. $\{2\}$　　D. 2

2. 命题"$\exists a\in\mathbf{R}, f(x)=x^2-ax$ 是偶函数"的否定是（　　）

A. $\forall a\in\mathbf{R}, f(x)=x^2-ax$ 不是偶函数　　B. $\forall a\in\mathbf{R}, f(x)=x^2-ax$ 是奇函数

C. $\exists a\in\mathbf{R}, f(x)=x^2-ax$ 不是偶函数　　D. $\exists a\in\mathbf{R}, f(x)=x^2-ax$ 是奇函数

3. 我国有着丰富悠久的"印章文化"，古时候的印章一般用贵重的金属或玉石制成，是过去官员或私人签署文件时代表身份的信物. 图 1 是明清时期的一个金属印章摆件，除去顶部的环以后可以看作是一个正四棱柱和一个正四棱锥组成的几何体，如图 2. 已知正四棱柱和正四棱锥的高相等，且正四棱锥的底面边长为 4，侧棱长为 $2\sqrt{3}$，则该几何体的体积是（　　）

图 1

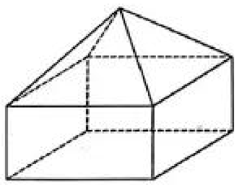


图 2

A. 32　　B. $\frac{64}{3}$　　C. $\frac{128}{3}$　　D. 64

4. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$ 的值是（　　）

A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{7}}{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

5. 已知实数 a,b 满足 $\lg(3a)+\lg b=\lg(2a+b)$，则 $a+2b$ 的最小值是(　　)

A. 9　　B. 3　　C. 2　　D. 6

6. 已知 $f(x)=\dfrac{e^{2x}+a}{e^x}$ 满足 $f(-x)+f(x)=0$，且 $f(x)$ 在 $(b,f(b))$ 处的切线方程为 $y=2x$，则 $2a+b=$(　　)

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. -2

7. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，点 P 在 $\triangle AB_1C$ 内运动，且满足 $PB=2$，则点 P 的轨迹长度为(　　)

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. $\sqrt{6}\pi$

8. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_2=3$，且 $(n+1)(S_{n+1}-S_n)=(n+2)a_n$，若存在 $n\in\mathbf{N}_+$，使得 $2S_n+14\leqslant ka_n$ 成立，则 k 的最小值是(　　)

A. $4\sqrt{3}+1$　　B. $\dfrac{42}{5}$　　C. $\dfrac{15}{2}$　　D. 8

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列命题为真命题的是(　　)

A. 若幂函数 $f(x)$ 的图象过点 $P\left(\dfrac{1}{4},2\right)$，则 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$

B. 函数 $f(x)=x^2+2x-3$ 的零点是 $(-3,0)$，$(1,0)$

C. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若 $f(x)$ 是奇函数，$f(x+1)$ 是偶函数，则 $f(2\,024)=0$

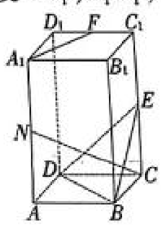
D. 函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{3}{x}$ 的零点所在区间可以是 $(2,3)$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$2a_{n+1}=a_n-3a_na_{n+1}\ (n\in\mathbf{N}_+)$，则下列结论正确的是(　　)

A. $\left\{\dfrac{1}{a_n}+3\right\}$ 为等差数列　　B. $\{a_n\}$ 为递减数列

C. $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}-3}$　　D. $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n=2^{n+2}-3n-4$

11. 如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，E,F,N 分别是棱 CC_1，C_1D_1，AA_1 的中点，则(　　)



A. $BD\perp NC$

B. $CN\perp$ 平面 BDE

C. 直线 BE 与 A_1F 是异面直线

D. 直线 NC 与平面 BDE 的交点是 $\triangle BDE$ 的外心

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_2 x|, & 0<x<2,\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{6}x+\dfrac{\pi}{6}\right), & 2\leqslant x\leqslant 12,\end{cases}$ 若存在实数 a 使得方程 $f(x)=a$ 有四个互不相等的实数根，分别为 x_1,x_2,x_3,x_4，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则下列说法正确的有(　　)

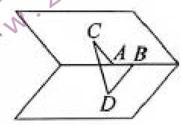
A. $0<a<\dfrac{1}{2}$　　B. $2x_1+x_2\geqslant 2\sqrt{2}$

C. $f\left(\dfrac{7}{2}\right)<a$　　D. $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{1}{x_4}$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{126}{55},\dfrac{2+9\sqrt{2}}{6}\right]$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知函数 $f(x)=\ln(3x-2)$，则 $f'(1)=$ ________.

14. 如图，已知在一个二面角的棱上有两个点 A,B，线段 AC,BD 分别在这个二面角的两个面内，并且都垂直于棱 AB，$AB=2,AC=3,BD=4,CD=4$. 则这个二面角的余弦值为________.



15. 已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，满足 $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$，$b_n=\log_4 a_1+\log_4 a_2+\log_4 a_3+\cdots+\log_4 a_n$，则 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n=$ ________.

16. 已知 $A=\{\alpha|f(\alpha)=0\}$，$B=\{\beta|g(\beta)=0\}$，若存在 $\alpha\in A,\beta\in B$，使得 $|\alpha-\beta|<k$，则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为"k阶逼近函数". 若 $f(x)=\ln(3-x)$ 与 $g(x)=x^2-ae^x$ 互为"1阶逼近函数"，则实数 a 的取值范围为________.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10分) 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 图象的对称中心到对称轴的最小距离为 $\frac{\pi}{4}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的值域.

18. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 为递增的等差数列，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1+a_5=18$，$a_2a_4=65$，$b_n=\frac{S_n}{n+c}$.

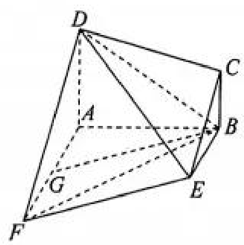
(1) 若数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，求非零常数 c 的值；

(2) 在(1)的条件下，$c_n=\frac{b_n+1}{2^n}$，求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. (12分) 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 与 $ABEF$ 均为直角梯形，$AD\parallel BC$，$AF\parallel BE$，$DA\perp$ 平面$ABEF$，$AB\perp AF$，$AD=AB=2BC=2BE=2$.

(1) 已知点 G 为 AF 上一点，$AG=AD$，求证：BG 与平面 DCE 不平行；

(2) 已知直线 BF 与平面 DCE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，求点 F 到平面 DCE 的距离.



20.（12 分）随着经济的不断发展，环境污染特别是水污染日益加剧，已经成为不可否认的客观事实. 某企业通过对我国城市自来水水质现状以及对水质污染解决途径的分析，可以预见，使用净水设备是解决水质污染问题的有效途径，在我国有着巨大的潜在市场. 该企业为抓住机遇，决定开发生产一款新型净水设备. 生产这款设备的年固定成本为 200 万元，每生产 x 台（$x\in \mathbf{N}_+$）需要另投入成本 $a(x)$（万元），当年产量 x 不足 35 台时，$a(x)=\frac{1}{2}x^2+50x-300$（万元），当年产量 x 不少于 35 台时，$a(x)=81x+\frac{1600}{x+1}-900$（万元）. 若每台设备的售价与销售量的关系式为 $80+\frac{100}{x}$，经过市场分析，该企业生产的净水设备能全部售完.

（1）求年利润 y（万元）关于年产量 x（台）的函数关系式.

（2）年产量 x 为多少台时，该企业在这一款新型净水设备的生产中获利最大？最大利润是多少万元？

21.（12 分）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2$，且当 $x>0$ 时，$f(x)>-2$.

（1）求 $f(0)$ 的值，并证明 $f(x)+2$ 为奇函数；

（2）求证 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；

（3）若 $f(1)=2$，解关于 x 的不等式 $f(x^2+x)+f(1-2x)>8$.

22.（12 分）已知函数 $f(x)=a\ln x-\frac{1}{2}x^2$，$g(x)=e^x-\sin x$，$a\in \mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)<\frac{1}{4}a^2g(a)$.

山东新高考联合质量测评高三数学参考答案

1.C 2.A

3.C 解：∵底面边长为4，∴底面的对角线长为$4\sqrt{2}$.

设正四棱柱和正四棱锥的高为h，因正四棱锥的侧棱长为$2\sqrt{3}$，

则根据题意可得$h^2+(2\sqrt{2})^2=(2\sqrt{3})^2$，

解得$h=2$，故该几何体的体积为$4\times4\times2+\frac{1}{3}\times4\times4\times2=\frac{128}{3}$，故选C.

4. B

5. B 解：由$\lg(3a)+\lg b=\lg(2a+b)$得$3ab=2a+b$，变形得$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=3$.

因为$(\frac{1}{a}+\frac{2}{b})(a+2b)=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\ge5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=9$，所以$a+2b\ge3$，故选B

6.D 解：函数$f(x)=\frac{e^{2x}+a}{e^x}$的定义域为R，因为$f(-x)+f(x)=0$，所以函数$f(x)$是R上的奇函数，

所以$f(0)=1+a=0$，解得$a=-1$，所以$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$，则$f(-x)=\frac{e^{-2x}-1}{e^{-x}}=\frac{1-e^{2x}}{e^x}=-f(x)$，

所以$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^x}$，则$f'(x)=\frac{2e^{2x}\cdot e^x-(e^{2x}-1)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^x}$，因为$f(x)$在$(b,f(b))$处的切线方程为

$y=2x$，所以$f'(b)=\frac{e^{2b}+1}{e^b}=2$，解得$b=0$，所以$2a+b=-2$. 故答案为：D.

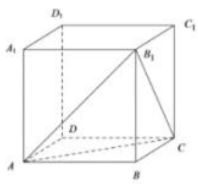
7. C 解：设点B到平面AB_1C的距离为d，

因为$V_{B-AB_1C}=V_{B_1-ABC}$，所以$\frac{1}{3}S_{\triangle AB_1C}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot BB_1$.

因为正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为3，

所以等边△AB_1C的边长为$3\sqrt{2}$，所以$S_{\triangle AB_1C}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3\sqrt{2})^2=\frac{9\sqrt{3}}{2}$，

所以$\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{3}}{2}d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times3\times3$，解得$d=\sqrt{3}$，



所以点B为球心，2为半径的球面与平面AB_1C的交线是以

$\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$为半径的圆.又因为等边△$AB_1C$的内切圆半径为

$3\sqrt{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}>1$,所以交线长为$2\pi$.故选C.

8. D 解：由已知 $(n+1)a_{n+1}=(n+2)a_n$，所以 $\frac{a_{n+1}}{n+2}=\frac{a_n}{n+1}$，所以数列 $\{\frac{a_n}{n+1}\}$ 是常数列.

又 $a_2=3$，所以 $\frac{a_n}{n+1}=\frac{a_2}{2+1}=1$，从而 $a_n=n+1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，1 为公差的等差数列，故 $S_n=\frac{n^2+3n}{2}$.

由存在 $n\in N_+$ 使得 $2S_n+14\le ka_n$ 成立可知，

存在 $n\in N_+$ 使得 $n^2+3n+14\le k(n+1)$ 成立，即 $k\ge(\frac{n^2+3n+14}{n+1})_{\min}$.

设 $t=n+1$，则 $n=t-1$，从而 $\frac{n^2+3n+14}{n+1}=\frac{(t-1)^2+3(t-1)+14}{t}=t+\frac{12}{t}+1$.

记 $f(t)=t+\frac{12}{t}+1$，由对勾函数性质可知，$f(t)$ 在 $(0,2\sqrt{3})$ 上单调递减，在 $(2\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增，

又 $t\in N_+$，所以 $f(3)=3+4+1=8$，$f(4)=4+3+1=8$，

所以 $t+\frac{12}{t}+1$ 的最小值是 8．故选：D.

9.ACD 解：选项 A：设幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$，由 $f(\frac{1}{4})=2$ 得 $\alpha=-\frac{1}{2}$，故选项 A 正确；

选项 B：$f(x)=x^2+2x-3=0$ 得 $x=-3$或1，所以 $f(x)$ 的零点为 -3和1，故选项 B 不正确；

选项 C：因为 $f(x+1)$ 是偶函数，所以 $f(x+1)=f(-x+1)$，

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x+1)=f(-x+1)=-f(x-1)\Rightarrow f(x)=-f(x+2)\Rightarrow f(x)=(x+4)$，

因此函数 $f(x)$ 的周期为4，所以 $f(2024)=f(4\times506)=f(0)=0$，故选项 C 正确；

选项 D：因为函数 $f(x)=\ln x-\frac{3}{x}$ 在 $x\in(1,2)$ 时单调递增，而 $f(2)=\ln2-\frac{3}{2}<0$，$f(3)=\ln3-1>0$，

故选项 D 正确.故选 ACD.

10.BD 解　因为 $2a_{n+1}=a_n-3a_na_{n+1}$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+3$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}}+3=2\left(\frac{1}{a_n}+3\right)$，且 $\frac{1}{a_1}+3=4\neq0$，所以 $\left\{\frac{1}{a_n}+3\right\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列，即 $\frac{1}{a_n}+3=4\times2^{n-1}$，所以 $\frac{1}{a_n}=2^{n+1}-3$，可得 $a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$，

故选项 A、C 错误；

因为 $\frac{1}{a_n}=2^{n+1}-3$ 单调递增，所以 $a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$ 单调递减，即 $\{a_n\}$ 为递减数列，故选项 B 正确；$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n=(2^2-3)+(2^3-3)+\ldots+(2^{n+1}-3)=(2^2+2^3+\ldots+2^{n+1})-3n=2^2\times\frac{1-2^n}{1-2}-3n=2^{n+2}-3n-4$，

故选项 D 正确．故选 BD.

11. ABD 解.对 A，以点 D 为坐标原点建立如图所示空间直角坐标系，不妨设 $AA_1=2AB=2$，则 $AB=1$，

由题意可知 $B(1,1,0)$，$N(1,0,1)$，$C(0,1,0)$，则 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{NC}=(-1,1,-1)$，

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{NC}=-1+1=0$，$\therefore\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{NC}$，即 $BD\perp NC$，故 A 正确；

对 B，$\because E(0,1,1)$，$\therefore\overrightarrow{DE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{NC}=1-1=0$，

$\therefore\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{NC}$ 即 $DE\perp NC$．

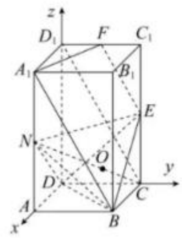
又$\because BD\perp NC$，$DE\cap BD=D,DE,BD\subset$ 平面 BDE，

所以 $NC\perp$ 平面 BDE，B 正确；

对 C，连接 EF，CD_1，由已知得 $CD_1\,//\,EF$，所以 $A_1B\,//\,EF$，所以

A_1,B,E,F 四点共面，

$\therefore$直线 BE 与 A_1F 是共面直线，C 错误；



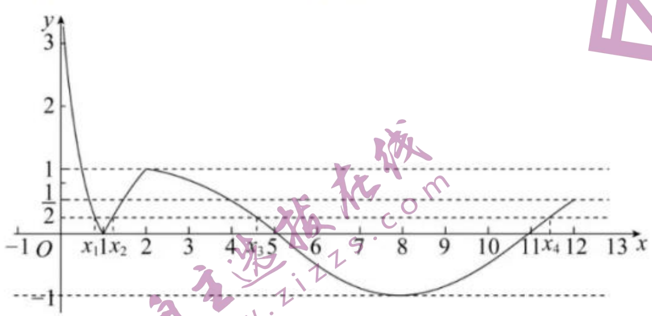
对 D，设直线 NC 与平面 BDE 的交点为 O，

由正方体知 $ND=NB=NE=DB=BE=DE=\sqrt{2}$，则四面体 $N-BDE$ 为正四面体.

$\because CN\perp$ 平面 BDE，则 O 为正三角形 BDE 的中心，故 D 正确.

故选 ABD.

12.BD 解：作出 $f(x)$ 在（0，12]上的图象，如图所示：



因为 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f(\sqrt{2})=f(4)=f(12)=\frac{1}{2}$，

又因为方程 $f(x)=a$ 有四个互不相等的实数根，所以 $0<a\le\frac{1}{2}$，故 A 错误；

对于 B，由题意可得 $\log_{\frac{1}{2}}x_1=-\log_{\frac{1}{2}}x_2$，且有 $0<x_1\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sqrt{2}\le x_2<2$，

所以 $x_1=\frac{1}{x_2}$，所以 $2x_1+x_2=\frac{2}{x_2}+x_2\geq2\sqrt{x_2\cdot\frac{2}{x_2}}=2\sqrt{2}$，当 $\frac{2}{x_2}=x_2$，即 $x_2=\sqrt{2}$ 时，

等号成立，故正确；

对于 C，由题意可得 $f\left(\frac{7}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\times\frac{7}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2}$，由 A 可知 $0<a\leq\frac{1}{2}$，

所以 $f\left(\frac{7}{2}\right)>a$，故错误；

对于 D，由题意可知：x_3 与 x_4 关于直线 $x=8$ 对称，且 $4\leq x_3<5, 11<x_4\leq12$，

所以 $x_3+x_4=16$，所以 $\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_3+x_4}{x_3x_4}=\frac{16}{x_3x_4}$.

因为 $x_3+x_4=16$，所以 $x_3=16-x_4$.

又因为 $11<x_4\leq12$，

所以 $x_3\cdot x_4=(16-x_4)x_4=-x_4^2+16x_4=64-(x_4-8)^2$，单调递减，

所以 $48\leq64-(x_4-8)^2<55$，

所以 $\frac{1}{55}<\frac{1}{x_3x_4}\leq\frac{1}{48}, \frac{16}{55}<\frac{16}{x_3x_4}\leq\frac{1}{3}$，所以 $\frac{16}{55}<\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\leq\frac{1}{3}$.

因为 $x_2\in(1,\sqrt{2}]$，所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=x_1+x_2=\frac{1}{x_2}+x_2$，单调递增，

所以 $\frac{1}{x_2}+x_2\in\left(2,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$，所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\in(2,\frac{3\sqrt{2}}{2}]$

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$ 的取值范围为 $\left(\frac{126}{55},\frac{2+9\sqrt{2}}{6}\right]$，故 D 正确．故选 BD.

13.3

14. $\frac{13}{24}$ 解：$\because BD\perp AB$，$AC\perp AB$，$\therefore\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

设二面角 $C-AB-D$ 为 θ，

则 $\overrightarrow{DB}\bullet\overrightarrow{AC}=4\times3\times\cos(\pi-\theta)=-12\cos\theta$．又 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$，

则 $\overrightarrow{DC}^2=\overrightarrow{DB}^2+\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$，

即 $4^2=4^2+2^2+3^2-24\cos\theta$，所以 $\cos\theta=\frac{13}{24}$. 故答案为：$\frac{13}{24}$.

15. $-\frac{2n}{n+1}$ 解：由 $a_n=(\frac{1}{4})^n$ 得 $b_n=-1-2-3-4-\cdots-n=-\frac{n(n+1)}{2}$

则 $\frac{1}{b_n}=-\frac{2}{n(n+1)}=-2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

所以 $T_n=-2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=-2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-\frac{2n}{n+1}$.

16. $\left(\frac{1}{e},\frac{4}{e^2}\right]$ 解 由题意可知 $f(2)=0$，且 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

所以函数 $f(x)$ 只有一个零点 2，

由 $|2-\beta|<1$，得 $1<\beta<3$，

所以函数 $g(x)=x^2-ae^x$ 在区间 $(1,3)$ 上存在零点.

由 $g(x)=x^2-ae^x=0$，得 $a=\frac{x^2}{e^x}$.

令 $h(x)=\frac{x^2}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增，在区间 $(2,3)$ 上单调递减，

且 $h(1)=\frac{1}{e}$，$h(2)=\frac{4}{e^2}$，$h(3)=\frac{9}{e^3}>\frac{1}{e}$，

要使函数 $g(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上存在零点，只需 $a\in\left(\frac{1}{e},\frac{4}{e^2}\right]$.

17. 解（1）由已知 $f(x)$ 图象的对称中心到对称轴的最小距离为 $\frac{\pi}{4}$，则 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore T=\pi$，$\therefore 2\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，解得 $\omega=1$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的解析式是 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.　（2 分）

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in Z$,

解得 $k\pi+\frac{3\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{7\pi}{8},k\in Z$.

所以函数的减区间为 $\left[k\pi+\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{7\pi}{8}\right],k\in Z$.　（5 分）

（2）由（1）知，函数在区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$ 上为增函数，在区间 $\left[\frac{3\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上为减函数.　（7 分）

因为 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$，$f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$，$f(\frac{3\pi}{4})=-1$，

故函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[-1,\sqrt{2}]$.（10 分）

18. 解（1）由 $\{a_n\}$ 为递增的等差数列，$a_1+a_5=a_2+a_4=18, a_2\cdot a_4=65$, 解得 $a_2=5, a_4=13$, 所以

$a_1=1$，公差 $d=4$，所以 $S_n=2n^2-n$，（4 分）

所以 $b_n=\dfrac{2n^2-n}{n+c}$. 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $c\neq 0$，则 $c=-\dfrac{1}{2}$.（6 分）

（2）由（1）知 $b_n=2n$，所以 $c_n=\dfrac{2n+1}{2^n}$.

因此 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\dfrac{7}{2^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{2n+1}{2^n}$.

又 $\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+\dfrac{7}{2^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}+\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$，（8 分）

两式相减得 $\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3}{2}+(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}})-\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}$，（10 分）

所以 $T_n=5-\dfrac{2n+5}{2^n}$.（12 分）

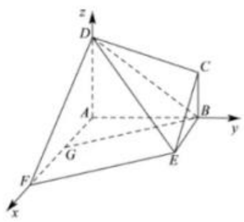
19.（1）证明：因为 $DA\perp$ 平面 $ABEF$，AB，$AF\subset$ 平面 $ABEF$，所以 $DA\perp AB$，$DA\perp AF$.

又 $AB\perp AF$，所以以 A 为坐标原点，AF,AB,AD 分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，（2 分）

则 $B(0,2,0)$、$E(1,2,0)$、$C(0,2,1)$、$D(0,0,2)$、$G(2,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{EC}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{ED}=(-1,-2,2)$，$\overrightarrow{BG}=(2,-2,0)$，（4 分）

设平面 DCE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EC}=-x+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{ED}=-x-2y+2z=0\end{cases}$，



令 $x=2$，则 $z=2, y=1$，所以 $\vec{n}=(2,1,2)$，

因为 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BG}=2\times2+1\times(-2)=2\neq0$，即不存在 λ 使得 $\overrightarrow{BG}$ 与 $\vec{n}$ 垂直，

所以 BG 与平面 DCE 不平行.（6 分）

（2）设 $AF=a$（$a>0$ 且 $a\neq1$），则 $F(a,0,0)$，所以 $\overrightarrow{BF}=(a,-2,0)$.（7 分）

∵直线 BF 与平面 DCE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5}=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{BF},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{BF}\bullet\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{BF}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{|2a-2|}{\sqrt{a^2+4}\times3}$$，化简得 $11a^2-40a-16=0$，

解得 $a=4$ 或 $a=-\dfrac{4}{11}$（舍去）. 故 $AF=4$.（9 分）

$\therefore F(4,0,0)$ $\overrightarrow{FD}=(-4,0,2)$，由(1)知 平面 DCE 的一个法向量 $\vec{n}=(2,1,2)$，

所以 F 到平面 DCE 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{FD}\bullet\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{4}{3}$ （12 分）

20. 解：（1）当 $x<35$，$x\in N_+$ 时，

$$y=\left(80+\frac{100}{x}\right)x-200-a(x)=80x+100-200-\left(\frac{1}{2}x^2+50x-300\right)=-\frac{1}{2}x^2+30x+200;$$

（2 分）

当 $x\geq 35$，$x\in N_+$ 时，

$$y=\left(80+\frac{100}{x}\right)x-200-a(x)=80x+100-200-\left(81x+\frac{1600}{x+1}-900\right)=-x-\frac{1600}{x+1}+800.$$ （4 分）

综上所述，（6 分）

$$y=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+30x+200, \\ -x-\dfrac{1600}{x+1}+800\end{cases} \quad (n\in N_+)$$

（2）当 $x<35$，$x\in N_+$ 时，$y=-\frac{1}{2}x^2+30x+200$，则当 $x=30$ 时，y 的最大值为 650；（8 分）

当 $x\geq 35$，$x\in N_+$ 时，$y=-x-\dfrac{1600}{x+1}+800=-(x+1)-\dfrac{1600}{x+1}+801\leq -80+801=721$

（当且仅当 $x+1=\dfrac{1600}{x+1}$，即 $x=39$ 时等号成立）.（11 分）

∴当年产量为 39 台时，该企业在这款新型净水设备的生产中获利最大，最大为 721 万元.（12 分）

21.（1）解：令 $x=y=0$，得 $f(0)=-2$.（2 分）

$f(x)+2+f(-x)+2=f(0)+2=0$，所以函数 $f(x)+2$ 为奇函数；（4 分）

（2）证明：在 R 上任取 $x_1>x_2$，则 $x_1-x_2>0$，所以 $f(x_1-x_2)>-2$.

又 $f(x_1)=f[(x_1-x_2)+x_2]=f(x_1-x_2)+f(x_2)+2>f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 R 上是增函数.（8 分）

（3）解：由 $f(1)=2$，得 $f(2)=6$，$f(3)=10$.（9 分）

由 $f(x^2+x)+f(1-2x)>8$ 得 $f(x^2-x+1)>f(3)$.（10 分）

因为函数 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数，

所以 $x^2-x+1>3$，解得 $x<-1$ 或 $x>2$.

故原不等式的解集为 $\{x\mid x<-1$ 或 $x>2\}$.（12 分）

22. 解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{a}{x}-x=\frac{a-x^2}{x}$，　　（2 分）

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

当 $a>0$ 时，$x\in(0,\sqrt{a})$，$f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 单调递增；　　（4 分）

$x\in(\sqrt{a},+\infty)$，$f'(x)<0$ 恒成立，$f(x)$ 单调递减.

综上所述，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递减.　　（5 分）

（2）当 $a>0$ 时，要使 $f(x)<\frac{1}{4}a^2g(a)$，则 $f(x)_{\max}<\frac{1}{4}a^2g(a)$　　（6 分）

由（1）可知，$f(x)_{\max}=f(\sqrt{a})=a\ln\sqrt{a}-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}(a\ln a-a)$，

所以 $\frac{1}{2}(a\ln a-a)<\frac{1}{4}a^2(e^a-\sin a)$，

即 $\frac{\ln a-1}{a}<\frac{1}{2}(e^a-\sin a)$　　（8 分）

令 $\varphi(a)=\frac{\ln a-1}{a}$，$h(a)=\frac{1}{2}(e^a-\sin a)$

$\varphi'(a)=\frac{2-\ln a}{a^2}$，可知 $\varphi(a)$ 在 $(0,e^2)$ 上单调递增，在 $(e^2,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\varphi(a)_{\max}=\varphi(e^2)=\frac{1}{e^2}$.　　（10 分）

$h'(a)=e^a-\cos a>0$ 恒成立，故 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$h(a)_{\min}>h(0)=\frac{1}{2}$，

因为 $\frac{1}{e^2}<\frac{1}{2}$，所以 $\varphi(a)<h(a)$，

所以当 $a>0$ 时，$f(x)<\frac{1}{4}a^2g(a)$　　（12 分）