

★ 启用前 · 绝密 ★

吉林市普通中学 2022—2023 学年度高中毕业年级第二次调研考试

数 学

本试卷共 22 小题，共 150 分，共 6 页，考试时间 120 分钟，考试结束后，将答案卡和试题卷一并交回。

第 I 卷（共 60 分）

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求。

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$ ， $B = \{(x, y) | x + y = 0\}$ ，则 $A \cap B$ 的子集个数

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 对于事件 A 与事件 B ，下列说法错误的是

- A. 若事件 A 与事件 B 互为对立事件，则 $P(A) + P(B) = 1$
B. 若事件 A 与事件 B 相互独立，则 $P(AB) = P(A)P(B)$
C. 若 $P(A) + P(B) = 1$ ，则事件 A 与事件 B 互为对立事件
D. 若 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，则事件 A 与事件 B 相互独立

3. 下列四个函数中，在其定义域内单调递增的是

- A. $y = x^{\frac{1}{2}}$ B. $y = \tan x$
C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 与椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的一个焦点重合，则下列说法不正确的是

- A. 椭圆 E 的焦距是 2 B. 椭圆 E 的离心率是 $\frac{1}{2}$
C. 抛物线 C 的准线方程是 $x = -1$ D. 抛物线 C 的焦点到其准线的距离是 4

5. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列，下列数列一定是等比数列的是

- A. $\{ka_n\} (k \in R)$ B. $\{a_n + a_{n+1}\}$
C. $\{a_n + 1\}$ D. $\{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}\}$

高三数学试题 第 1 页（共 6 页）

6. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 若直线 $l_1: ax + by - 2 = 0$ 与直线 $l_2: 2x + (1-a)y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a + 2b$ 的最小值为

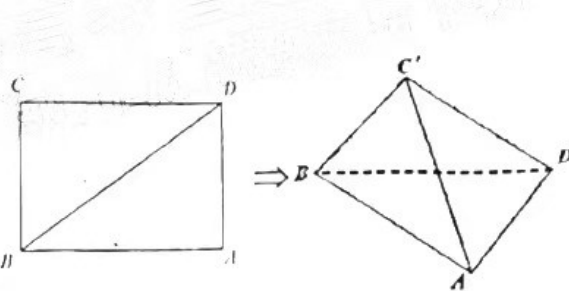
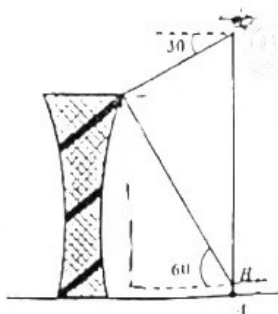
A. 1 B. 3 C. 8 D. 9

7. 近日, 吉林市丰满区东山顶上新建了一处打卡地——朱雀云顶观景塔, 引来广大市民参观. 某同学在与塔底水平的 A 处利用无人机在距离地面 $21m$ 的 C 处观测塔顶的俯角为 30° , 在无人机正下方距离地面 $1m$ 的 B 处观测塔顶仰角为 60° , 则该塔的高度为

A. $15m$ B. $16m$ C. $15\sqrt{3}m$ D. $10\sqrt{3}m$



(7 题图)



(8 题图)

8. 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $BC = 2$, 将 $\triangle CBD$ 沿 BD 折起至 $\triangle C'BD$. 当直线 $C'B$ 与 AD 所成的角最大时, 三棱锥 $C'-ABD$ 的体积为

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{5\sqrt{13}}{13}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{6\sqrt{13}}{13}$

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知复数 $z = 1 + i$, 则下列说法正确的是

A. z 的共轭复数是 $1 - i$

B. z 的虚部是 i

C. $\frac{\bar{z}}{z} = i$

D. 若复数 z_0 满足 $|z_0 - z| = 1$, 则 $|z_0|$ 的最大值是 $\sqrt{2} + 1$



10. 如图, A, B 是在单位圆上运动的两个质点. 初始时刻, 质点 A 在 $(1, 0)$ 处, 质点 B 在第一

象限, 且 $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$. 质点 A 以 $\frac{\pi}{6} \text{ rad/s}$ 的角速度按顺时针方向运动, 质点 B 同时以

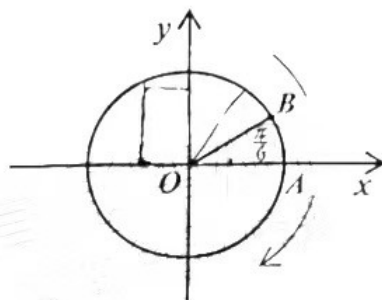
$\frac{\pi}{12} \text{ rad/s}$ 的角速度按逆时针方向运动, 则

A. 经过 1s 后, 扇形 AOB 的面积为 $\frac{5\pi}{12}$

B. 经过 2s 后, 劣弧 $\widehat{AB}$ 的长为 $\frac{\pi}{3}$

C. 经过 6s 后, 质点 B 的坐标为 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

D. 经过 $\frac{22}{3}\text{s}$ 后, 质点 A, B 在单位圆上第一次相遇



11. 如图, 函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}$ 的图象称为牛顿三叉戟曲线, 函数 $g(x)$ 满足 $g(x) = f(x) - a$

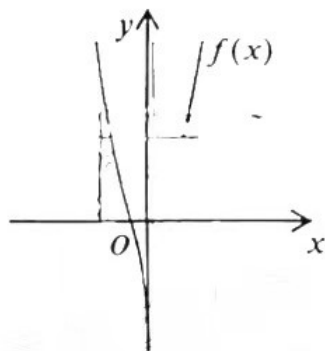
($a \in \mathbb{R}$) 有 3 个零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 则

A. $a > 6$

B. $x_1 + x_3 > 0$

C. $x_2 + x_3 > 4$

D. $(x_2 - x_1)^2 \geq 24\sqrt{2}$



12. 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB = 2$, 动点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AA_1}$,

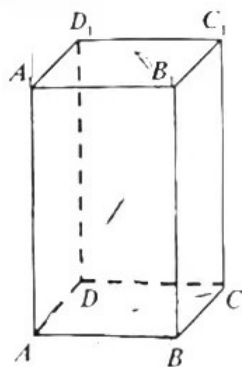
且 $a, b \in (0, 1)$. 则下列说法正确的是

A. 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 直线 $AC \perp$ 平面 BPB_1

B. 当 $a + b = 1$ 时, $PB + PB_1$ 的最小值为 $\sqrt{6}$

C. 若直线 BP 与 BD 所成角为 $\frac{\pi}{4}$, 则动点 P 的轨迹长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

D. 当 $a + 2b = 1$ 时, 三棱锥 $P-ABC$ 外接球半径的取值范围是 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$



第 II 卷（共 90 分）

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。其中第 15 题的第一个空填对得 2 分，第二个空填对得 3 分。

13. 命题“ $\exists x \in \mathbb{R}, ax^2 + x + 1 < 0$ ”为假命题，则实数 a 的取值范围为_____。

14. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 60° ， $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$ ，则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____。

15. 意大利数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时发现了数列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ ，数列中的每一项被称为斐波那契数，记作 F_n 。已知 $F_1 = 1$ ， $F_2 = 1$ ， $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$ ，且 $n > 2$)。

① 若斐波那契数 F_n 除以 4 所得的余数按原顺序构成数列 $\{a_n\}$ ，则 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023} =$ _____；

② 若 $F_{2024} = a$ ，则 $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{2022} =$ _____。

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} xe^{x-1} + 4, & x \geq 0, \\ \sqrt{1+x^2}, & x < 0, \end{cases}$ 点 M, N 是函数 $f(x)$ 图象上不同的两个点，则 $\tan \angle MON$ (O 为坐标原点) 的取值范围是_____。

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

坐位体前屈是中小学体质健康测试项目，主要测试学生躯干、腰、髋等部位关节韧带和肌肉的伸展性、弹性及身体柔韧性。在对某高中 1500 名高三年级学生的坐位体前屈成绩的调查中，采用按学生性别比例分配的分层随机抽样抽取 100 人，已知这 1500 名高三年级学生中男生有 900 人，且抽取的样本中男生的平均数和方差分别为 $13.2cm$ 和 13.36 ，女生的平均数和方差分别为 $15.2cm$ 和 17.56 。

(I) 求抽取的总样本的平均数；

(II) 试估计高三年级全体学生的坐位体前屈成绩的方差。

高三数学试题 第 4 页 (共 6 页)

参考公式：总体分为 2 层，分层随机抽样，各层抽取的样本量、样本平均数和样本方差分

别为： $n_1, \bar{x}, s_1^2$ ； $n_2, \bar{y}, s_2^2$ 。记总样本的平均数为 $\bar{w}$ ，样本方差为 s^2 ，

$$s^2 = \frac{1}{n_1 + n_2} \{n_1[s_1^2 + (\bar{x} - \bar{w})^2] + n_2[s_2^2 + (\bar{y} - \bar{w})^2]\}$$

18. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $b \cos C + c \cos B = 6$ 。

(I) 求边 a ；

(II) 若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，且 _____，求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的取值范围。

要求：从① $A = \frac{\pi}{4}$ ② $b + c = 10$ 从这两个条件中任选一个，补充在上面的问题中，并给出

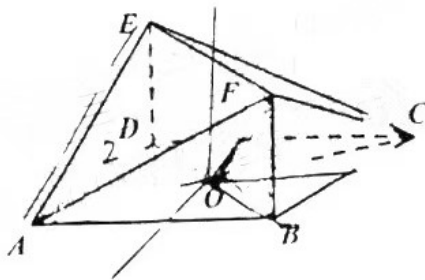
解答。如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

19. (本小题满分 12 分)

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle DAB = 60^\circ$ ，四边形 $BDEF$ 为矩形， $BD = 2BF = 2$ ， AC 与 BD 交于 O 点， $FA = FC$ 。

(I) 求证： $AC \perp$ 平面 $BDEF$ ；

(II) 求二面角 $F-AE-C$ 的余弦值。



20. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 3$ ，数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 2 为公差的等差数列。

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 设 $b_n = \frac{(-1)^n(a_n + 2)}{a_n a_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} 。

高三数学试题 第 5 页 (共 6 页)

21. (本小题满分 12 分)

在平面内, 动点 $M(x, y)$ 与定点 $F(2, 0)$ 的距离和它到定直线 $l: x = \frac{1}{2}$ 的距离比是常数 2.

(I) 求动点 M 的轨迹方程;

(II) 若直线 m 与动点 M 的轨迹交于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$ (O 为坐标原点), 求

$|OP|^2 + |OQ|^2$ 的最小值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2 \ln x - x + \frac{1}{x}$.

(I) 判断 $f(x)$ 的单调性;

(II) 设函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{x} + 1$, 记 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, 若

$g(x)(x^2 + mx + n) \leq 0$ 对任意的正数 x 恒成立, 求 $\left[2 \ln n - \frac{1}{ne^{m+2}} + \frac{1}{n} + 1 \right]$ 的值.

(参考数据: $\ln 3 \approx 1.1$, $\ln 2 \approx 0.7$)

命题、校对: 数学学科核心组

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线