# 湖北省黄冈中学2023届高三第三次模拟考试

## 数学试卷（参考答案）

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | A | D | D | A | D | C | B | C | BC | ABD | AB | AC |

13. 480　　14. 3　　15. $\lambda<3$　　16. $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$

四、解答题：

17.【解析】（1）依题意 $a_n>0$，当 $n=1$ 时，$4a_1=4S_1=(a_1-1)(a_1+3)$，解得 $a_1=3$，

由 $4S_n=(a_n-1)(a_n+3)(n\in\mathbf{N}^*)$，当 $n\geq2$ 时，有 $4S_{n-1}=(a_{n-1}-1)(a_{n-1}+3)$，

作差得：$4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$，所以 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$，

因为 $a_n+a_{n-1}>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=2(n\geq2)$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公差为 2 的等差数列，所以 $a_n=2n+1$.

……………………………5 分

（2）由（1）得，$a_{100}=201$，又 $2^7<201<2^8$，同时 $a_{93}=187>2^7$，所以 $b_{100}=a_{93}$

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_{100}=(a_1+a_2+\cdots+a_8)+(2^1+2^2+\cdots+2^7)=\dfrac{93}{2}(a_1+a_{93})+\dfrac{2(2^7-1)}{2-1}=8835+254=9089$.

所以 $\{b_n\}$ 的前 100 项和为 9089. ……………………………10 分

18.【解析】（1）由题意得 $\dfrac{\sin A-\sin C}{\sin C}=\dfrac{\sin^2A-\sin^2C}{\sin^2B}$，即 $\dfrac{1}{\sin C}=\dfrac{\sin A+\sin C}{\sin^2B}$.

由正弦定理得 $b^2=c^2+ac$，又由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以 $c=a-2c\cos B$，故

$\sin C=\sin A-2\sin C\cos B$，故 $\sin C=\sin(B+C)-2\sin C\cos B$，整理得 $\sin C=\sin(B-C)$.

又△$ABC$ 为锐角三角形，则 $C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right),B-C\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $C=B-C$，因此 $B=2C$.

……………………………6 分

（2）在△$BCD$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin\angle BDC}=\dfrac{BD}{\sin C}$，所以 $\dfrac{6}{\sin\angle BDC}=\dfrac{BD}{\sin C}$. 所以

$BD=\dfrac{6\sin C}{\sin\angle BDC}=\dfrac{6\sin C}{\sin 2C}=\dfrac{3}{\cos C}$. 因为△$ABC$ 为锐角三角形，且 $B=2C$，所以 $\begin{cases}0<C<\dfrac{\pi}{2}\\0<2C<\dfrac{\pi}{2}\\0<\pi-3C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\dfrac{\pi}{6}<C<\dfrac{\pi}{4}$.

故$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos C<\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$2\sqrt{3}<BD<3\sqrt{2}$． 因此线段$BD$长度的取值范围$\left(2\sqrt{3},3\sqrt{2}\right)$……………………12 分

19.【解答】(1) 将得分为 50 分记为事件 A；得分为 50 分即在六个问题的结果中，有五个满意，一个不满意，来源：高三答案公众号

可能的结果共有：$C_2^1C_2^1C_3^2C_3^2+C_2^2C_3^1C_3^2+C_2^2C_3^2C_3^1=54$（种）……………1'

三名顾客产生的反馈结果总共有：$(C_4^2)^3=216$（种）……………………2'

则$P(A)=\frac{54}{216}=\frac{1}{4}$ ∴购物中心得分为 50 分的概率为$\frac{1}{4}$……………………3'

（2）将顾客丙投出一个不满意记为事件 B，则

$P(AB)=\frac{C_2^2C_3^2C_3^1}{(C_4^2)^3}=\frac{1}{24}$……………………………………………………5'

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$……………………………………………………6'

（3）X可能的取值为 2，3，4，5，6……………………………………………………7'

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^1C_3^1}{(C_4^2)^3}=\frac{1}{24}$ $P(X=3)=\frac{C_2^1C_2^1C_3^1C_3^2+C_2^2C_3^1C_3^2+C_2^2C_3^2C_3^1}{(C_4^2)^3}=\frac{1}{4}$

$P(X=4)=\frac{C_2^2C_3^2C_3^2+C_2^1C_2^1C_3^1C_3^2+C_2^1C_2^1C_3^2C_3^1+C_2^2C_3^1C_3^1}{(C_4^2)^3}=\frac{5}{12}$ $P(X=5)=\frac{1}{4}$

$P(X=6)=\frac{C_2^2C_3^2C_3^2}{(C_4^2)^3}=\frac{1}{24}$……………………………………………11'

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{24}$ |

$E(X)=2\times\frac{1}{24}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{5}{12}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{24}=4$

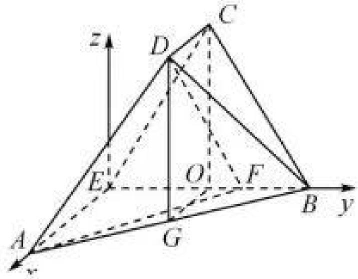
$\because\xi=10X$，$\therefore E(\xi)=10\times E(X)=40$……………………………………12'

20.【解析】(1) 如图，取$BE$的中点$O$，连接$OC$，$OG$，则$OG//AE$，$OG=\frac{1}{2}AE$．

因为$CD//AE$，$CD=\frac{1}{2}AE$，故$CD//OG$且$CD=OG$，所以四边形$CDGO$为平行四边形，则$DG//CO$．

因为$AE\perp CE$，$AE\perp EB$，$CE\cap EB=E$，$CE,EB\subset$面$BCE$，所以$AE\perp$平面$BCE$. $CO\subset$平面$BCE$，所以$AE\perp CO$．因为$BC=CE$，所以$BE\perp CO$． 因为$BE\cap AE=E$，$BE,AE\subset$面$ABE$，所以$CO\perp$平面$ABE$，

所以 $DG\perp$ 平面 $ABE$……………………………………6 分




（2）如图，过点 $E$ 作直线 $l//DG$，则直线 $l\perp$ 面 $ABE$，$AE,EB\subset$ 面 $ABE$，又 $AE\perp EB$，所以直线 $l$，$EA$，$EB$ 两两相互垂直，来源：高三答案公众号

以 $E$ 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$

$C(0,1,\sqrt{2})$，$D(1,1,\sqrt{2})$，设 $F(0,t,0)(0\le t\le 2)$，则 $\overrightarrow{AD}=(-1,1,\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{AF}=(-2,t,0)$.

设面 $ADF$ 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\vec{m}=-x_1+y_1+\sqrt{2}z_1=0\\ \overrightarrow{AF}\cdot\vec{m}=-2x_1+ty_1=0\end{cases}$，令 $y_1=2$，则 $\vec{m}=\left(t,2,\dfrac{\sqrt{2}(t-2)}{2}\right)$.

设面 $ABD$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}=-x_2+y_2+\sqrt{2}z_2=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=-2x_2+2y_2=0\end{cases}$，令 $x_2=1$，则 $\vec{n}=(1,1,0)$，

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{t+2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{t^2+2^2+\dfrac{(t-2)^2}{2}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，解得 $t=\dfrac{2}{3}$ 或 6（舍去），故 $\dfrac{EF}{EB}=\dfrac{1}{3}$……………………12 分

21.【解析】（1）由已知可设双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，椭圆方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，则双曲线的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$，即 $bx-ay=0$，故 $\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{3}$，即 $b=\sqrt{3}$，又 $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{1}{2}$，解得 $a=2$，所以双曲线方程：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$，

椭圆方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；……………………………4 分

（2）设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，直线 $AP$：$y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，

$\begin{cases}y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}\Rightarrow\left[3+\dfrac{4y_0^2}{(x_0+2)^2}\right]x^2+\dfrac{16y_0^2}{(x_0+2)^2}x+\dfrac{16y_0^2}{(x_0+2)^2}-12=0$，显然 $\Delta>0$，

由 $-2x_N=\dfrac{16y_0^2-12(x_0+2)^2}{3(x_0+2)^2+4y_0^2}$，又因为 $P$ 在双曲线上，满足 $\dfrac{x_0^2}{4}-\dfrac{y_0^2}{3}=1$，即 $4y_0^2=3x_0^2-12$，

所以 $-x_N=\dfrac{8y_0^2-6(x_0+2)^2}{3(x_0+2)^2+4y_0^2}=\dfrac{6x_0^2-24-6(x_0+2)^2}{3(x_0+2)^2+3x_0^2-12}=\dfrac{-24(x_0+2)}{6x_0(x_0+2)}=\dfrac{-4}{x_0}$，即 $x_N=\dfrac{4}{x_0}$.

同理直线 $BP$：$y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，可得 $x_M=\dfrac{4}{x_0}$，所以 $x_T=\dfrac{4}{x_0}$，若存在 $x_P=2x_T$，即 $x_0=2\times\dfrac{4}{x_0}$，

而 $P$ 在第一象限，所以 $x_0=2\sqrt{2}$，即 $P(2\sqrt{2},\sqrt{3})$……………………………12 分

22.【解析】（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=x\sin x+\cos x$，$f'(x)=x\cos x$，

由 $f'(x)=0$，得 $x=-\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 随 $x$ 的变化如下表所示：

| $x$ | $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ | 0 | $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | ↗ | 极大 | ↘ | 极小 | ↗ | 极大 | ↘ |

$\therefore f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 2 个极大值：$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，　$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 1 个极小值：$f(0)=1$.

......................................5 分

（2）由 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，知 $h(x)\geq g(x)$.

（i）当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，$\therefore h(x)>0$，故 $h(x)$ 在 $(\pi,+\infty)$ 上无零点.

（ii）当 $x=\pi$ 时，$g(\pi)=0$，$f(\pi)=-1+\pi^2a$.

故当 $f(\pi)\leq 0$ 时，即 $a\leq\frac{1}{\pi^2}$ 时，$h(\pi)=0$，$x=\pi$ 是 $h(x)$ 的零点；

当 $f(\pi)>0$ 时，即 $a>\frac{1}{\pi^2}$ 时，$h(\pi)=f(\pi)>0$，$x=\pi$ 不是 $h(x)$ 的零点.

（iii）当 $x\in(0,\pi)$ 时，$g(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 的零点就是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 的零点，

$f'(x)=x(2a+\cos x)$，$f(0)=1$.

①当 $a\leq-\frac{1}{2}$ 时，$2a+\cos x\leq 0$，故 $x\in(0,\pi)$ 时，$f'(x)\leq 0$，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 是减函数，结合 $f(0)=1$，

$f(\pi)=-1+\pi^2a<0$ 可知，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 有一个零点，故 $h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有 1 个零点.

②当 $a\geq\frac{1}{2}$ 时，$2a+\cos x\geq 0$，故 $x\in(0,\pi)$ 时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 是增函数，

结合 $f(0)=1$ 可知，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 无零点，故 $h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上无零点.

③当 $a\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 时，$\exists x_0\in(0,\pi)$，使得 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 是增函数；

$x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(x_0,\pi)$ 是减函数；

由 $f(0)=1$ 知，$f(x_0)>0$.

当 $f(\pi)=-1+\pi^2a\geq 0$，即 $\frac{1}{\pi^2}\leq a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上无零点，故 $h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上无零点.

当 $f(\pi)=-1+\pi^2a<0$，即 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{\pi^2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有 1 个零点，故 $h(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有 1 个零点.

综上所述，$a<\frac{1}{\pi^2}$ 时，$h(x)$ 有 2 个零点；$a=\frac{1}{\pi^2}$ 时，$h(x)$ 有 1 个零点；$a>\frac{1}{\pi^2}$ 时，$h(x)$ 无零点..........12 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。