高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 已知集合 $A=\{y|y=\ln(x^2+e)\}$，$B=\{x|x=\sqrt{4-y^2}\}$，则 $A\cap B=$

A. $[1,+\infty)$　　B. $[1,2]$　　C. $[1,2)$　　D. $(1,2)$

2. 已知复数 $z=2+i$，则 $\left|\frac{z}{\bar{z}-1}\right|=$

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

3. 已知单位向量 e_1,e_2 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则 $|e_1-t(e_1-e_2)|(t\in\mathbf{R})$ 的最小值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{3}{4}$

4. 从 2023 年伊始，各地旅游业爆火，少林寺是河南省旅游胜地。某大学一个寝室 6 位同学 A,B,C,D,E,F 慕名而来，游览结束后，在门前站一排合影留念，要求 A,B 相邻，C 在 D 的左边，则不同的站法共有

A. 480 种　　B. 240 种　　C. 120 种　　D. 60 种

5. 已知函数 $f(x)=2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在 $(0,\pi)$ 有且仅有 2 个极值点，且在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{24}\right)$ 上单调递增，则 ω 的取值范围为

A. $\left[\frac{5}{2},\frac{17}{6}\right]$　　B. $\left[\frac{5}{2},4\right]$　　C. $\left[2,\frac{17}{6}\right]$　　D. $[2,$ [illegible]

6. 设 $a=\frac{2}{3}$，$b=\ln 2$，$c=\sin 1$，则

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$

C. $c>b>a$　　D. [illegible]

7. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\frac{a_{n+2}+2a_n}{3a_{n+1}}=1$，$a_1=1$，$a_2=2$. 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$(2+\lambda)(S_n+1)\log_2 a_{2n}>\log_2^2 a_{n+1}$ 恒成立，则

A. $\lambda>0$　　B. $\lambda>-\frac{1}{2}$　　C. $\lambda>-1$　　D. $\lambda>-\frac{3}{2}$

8. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点为 F,过点 F 的直线 l 交 C 于 M,N 两点,线段 MN 的中点为 E,过 E 作线段 MN 的中垂线交 x 轴于点 R,过 M,N 两点分别作 C 的准线的垂线,垂足分别为 A,B. 线段 AB 的中点为 P,则$\left|\dfrac{PF}{ER}\right|=$

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{3}$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 某市高三一模物理成绩 X 近似服从正态分布 $X\sim N(70,\sigma^2)(\sigma>0)$,且 $P(X\geq 80)=0.2$,则

A. $P(X<80)=0.8$　　B. $P(60<X<80)=0.6$

C. $P(X<60)=0.2$　　D. $P(X>60)=0.7$

10. 在平面直角坐标系 xOy 中,点 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$间的折线距离 $d(M,N)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$,已知 $A(a,b)$,$B(1,1)$,记 $s=a^2+b^2+2a+4b$,则

A. 若 $d(A,B)=1$,则 s 有最小值 8

B. 若 $d(A,B)=1$,则 A 点轨迹是一个正方形

C. 若 $d(A,B)\leq 1$,则 s 有最大值 15

D. 若 $d(A,B)\leq 1$,则点 A 的轨迹所构成区域的面积为 π

11. 已知 AC 为圆锥 SO 底面圆 O 的直径,$SA=4$,$SO=2\sqrt{3}$,点 B 为圆 O 上异于 A、C 的一点,M 为线段 SC 上的动点(异于端点),则

A. 直线 SB 与平面 SAM 所成角的最大值为$\dfrac{\pi}{6}$

B. 圆锥 SO 内切球的体积为$\dfrac{32}{125}\sqrt{3}\pi$

C. 棱长为$\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$的正四面体可以放在圆锥 SO 内

D. 当 M 为 SC 的中点时,满足 $SB\perp AM$ 的点 B 有 2 个

12. 已知 $\log_a b>0(a>0$ 且 $a\neq 1)$,若 $a\neq b$,且 $e^a\cdot b>e^b\cdot a$,则

A. $\ln b-a<-1$　　B. $b^{a-1}>a^{b-1}$

C. $(a+1)\ln(b+1)>(b+1)\ln(a+1)$　　D. $\log_{a+1}a>\log_{b+1}b$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 高台建筑流行于战国到西汉时期,当时重要宫殿台榭多采用此建筑形式. 高台建筑以高大的夯土台为基础和核心,在夯土版筑的台上层层建屋,木构架紧密依附夯土台而形成土木混合的结构体系. 如图是一个非常简易的高台建筑,塔下方是一个正四棱台形夯土台,已知该四棱台上底边长 10 m,下底边长 16 m,侧棱长 8 m,则此四棱台的体积为__________ m^3.

14. 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,且 $\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$,则 $\alpha-\beta$ 的最大值为________.

15. 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,P 为椭圆上不与顶点重合的任一点,C 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心,O 为坐标原点,则直线 PC 与 OP 的斜率之比$\dfrac{k_{PC}}{k_{OP}}=$________(用 a,b 表示)

16. 若 $xe^x-e^x\ln x>mx-e^x$ 恒成立,则正整数 m 的最大值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

记锐角△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2b\sin^2\frac{A+B}{2}=\sqrt{3}c\sin B$.

(1)求 C；

(2)若边 AB 上的高 $CD=2$，当△ABC 的面积取最小值时，求△ABC 内切圆的面积.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，$a_1=1$，S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $a_n=\frac{2}{S_n+S_{n-1}}(n\geqslant 2)$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\frac{S_n^2+S_{n+1}^2}{S_n^4\cdot S_{n+1}^4}$，记$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\frac{1}{2}$.

19.（本小题满分 12 分）

自古以来，杭州就被称为“人间天堂”，无数文人墨客在此毫不吝啬地为之挥洒笔墨，留下千古诗篇名句，在宋代柳永的诗中这样描写到“东南形胜，三吴都会，钱塘自古繁华”，就连马可·波罗都称之为“世界上最美丽华贵之天城”. 第 19 届亚运会将在被称为“人间天堂”的杭州举办，组委会计划采用志愿服务知识问答和技能考核的形式，从报名者中择优选取一部分成为正式的亚运会志愿者.

(1)已知报名者 1，2，3 组人数之比为 3 : 3 : 4，将这 3 组报名者混在一起进行亚运会志愿服务知识问答，假设 1，2，3 组中的每一个人答对某道题的概率分别为 0.90，0.95，0.90，从中任选一人，求此人答对该题的概率；

(2)从 4 名女性报名者和 3 名男性报名者中随机选出 3 名进行亚运会服务技能考核，记 X 为其中女性的人数，求 X 的数学期望.

20.（本小题满分 12 分）

如图 1，直角梯形 $ABCD$ 中，$AB=\frac{1}{2}CD=2$，$AD=2$，$AD\perp CD$，$AB/\!/CD$，将直角梯形 $ABCD$ 绕 AD 旋转一周得到如图 2 的圆台，EF 为圆台的母线，且 $CF=4$，M 是 BC 的中点.

(1)在线段 CF 上是否存在一点 N，使 $MN/\!/$平面 $AEFD$? 说明理由；

(2)若 P 为线段 CD 的中点，求平面 $AEFD$ 与平面 MFP 夹角的余弦值.

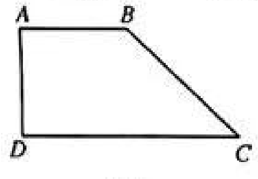


图1

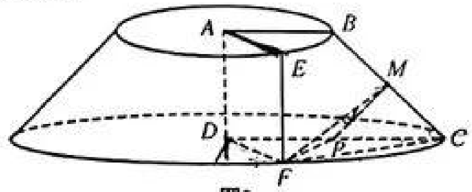


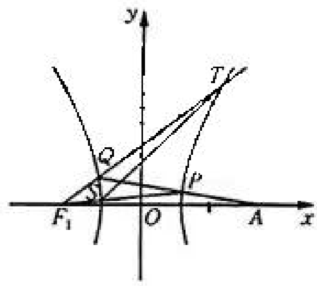
图2

21.（本小题满分 12 分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，且 $|F_1F_2|=8$，过 F_2 作其中一条渐近线的垂线，垂足为 M，延长 F_2M 交另一条渐近线于点 N，且 $|F_2M|=|MN|$.

(1)求 C 的方程；

(2)如图，过 $A(6,0)$作直线 l(l 不与 x 轴重合)与曲线 C 的两支交于 P，Q 两点，直线 F_1P，F_1Q 与 C 的另一个交点分别为 S，T，求证：直线 ST 经过定点.



22.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=ax\mathrm{e}^x-x-\ln x-1(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$，求 $f(x)$在$(0,t](t>0)$上的最小值 $h(t)$；

(2)若 $f(x)$有 2 个零点 x_1，$x_2(x_1<x_2)$.

①求 a 的取值范围；

②求证：$\mathrm{e}^{x_1+x_2}<\frac{1}{a^2x_1x_2}$.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. B　由题意得 $A=[1,+\infty)$，$B=[0,2]$，则 $A\cap B=[1,2]$. 故选 B.

2. C　$\frac{z}{\bar{z}-1}=\frac{2+i}{1-i}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，所以 $\left|\frac{z}{\bar{z}-1}\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right|=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 C.

3. B　$|\boldsymbol{e}_1-t(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)|^2=|(1-t)\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2|^2=(1-t)^2+2(1-t)t\cdot\frac{1}{2}+t^2=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，所以当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$|\boldsymbol{e}_1-t(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)|_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 B.

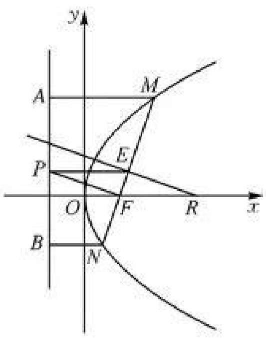
4. C　A，B 站在一起有 A_2^2 种，将 A，B 看成一个整体与 C，D，E，F 进行全排列，同时要求 C 在 D 的左边，共有 $\frac{A_2^2A_5^5}{A_2^2}=120$(种). 故选 C.

5. A　因为 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 有且仅有 2 个极值点，所以 $2\pi<\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant3\pi$，解得 $\frac{11}{6}<\omega\leqslant\frac{17}{6}$. 因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{11}{24}\pi\right)$ 上单调递增，又 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{11}{24}\pi\right)\subseteq(0,\pi)$，所以 $\begin{cases}\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\geqslant\pi,\\ \frac{11}{24}\pi\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant2\pi,\end{cases}$ 解得 $\frac{5}{2}\leqslant\omega\leqslant4$，所以 $\frac{5}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{17}{6}$. 故选 A.

6. C　因为 2 [illegible]，所以 $2>e^{\frac{2}{3}}$，所以 $\ln 2>\frac{2}{3}$，即 $b>a$；令 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)(0<x<1)$，$f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$，$f''(x)=$ [illegible] 时，$f''(x)$ 单调递减，$f''(0)=1>0$，$f''(1)=-\sin 1+\frac{1}{4}<-\sin\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}=-\frac{2\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}<0$，所以 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 [illegible]；当 $x\in(x_0,1)$，$f''(x)<0$，$f'(x)$ 单调递减，而 $f'(0)=0$，$f'(1)=\cos 1-\frac{1}{2}>\cos\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}$ [illegible]，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $f(1)>f(0)=0$，所以 $\sin 1-\ln 2>0$，即 $c>b$. 故选 C.

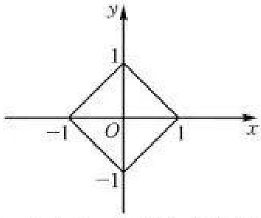
7. D　由 $\frac{a_{n+2}+2a_n}{3a_{n+1}}=1$，得 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$，又 $a_2-a_1=1$，所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 2 为公比，1 为首项的等比数列，所以 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$，则 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2^1+2^0+1=2^{n-1}$，进而可得 $S_n=2^n-1$，不等式 $(2+\lambda)(S_n+1)\log_2 a_{2n}>\log_2^2 a_{n+1}$ 恒成立，即 $2^n(2n-1)(2+\lambda)>n^2$，$2+\lambda>\frac{n^2}{(2n-1)\cdot2^n}$. 设 $b_n=\frac{n^2}{(2n-1)\cdot2^n}$，则 $b_{n+1}-b_n=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)\cdot2^{n+1}}-\frac{n^2}{(2n-1)\cdot2^n}=\frac{-2n^3+n^2-1}{(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot2^{n+1}}$，当 $n\geqslant1$ 时，$b_{n+1}-b_n<0$，$\{b_n\}$ 为递减数列，所以 $(b_n)_{\max}=b_1=\frac{1}{2}$，所以 $2+\lambda>\frac{1}{2}$，解得 $\lambda>-\frac{3}{2}$. 故选 D.

8. A　设直线 MN：$x=ty+\frac{p}{2}$，联立 $\begin{cases}x=ty+\frac{p}{2},\\ y^2=2px,\end{cases}\Rightarrow y^2-2pty-p^2=0$，所以 $\begin{cases}y_1+y_2=2pt,\\ y_1\cdot y_2=-p^2,\end{cases}$ 则 $x_1+x_2=t(y_1+y_2)+p=2pt^2+p$，得 $E\left(pt^2+\frac{p}{2},pt\right)$，线段 MN 的中垂线方程为 $x=-\frac{1}{t}(y-pt)+pt^2+\frac{p}{2}$，令 $y=0$，得 $x=pt^2+\frac{3}{2}p$. 所以 $R\left(pt^2+\frac{3}{2}p,0\right)$，所以 $|RF|=pt^2+p$，$|EP|=pt^2+p$，所以 $|RF|=|EP|$. 又 $RF\,/\!/\,EP$，所以四边形 $EPFR$ 为平行四边形，$|ER|=|PF|$，所以 $\frac{|PF|}{|ER|}=1$. 故选 A.



9. ABC　由题可知，$P(X<80)=1-P(X\geqslant80)=0.8$，A 正确；由对称性可知 $P(X\leqslant60)=0.2$，所以 $P(60<X<80)=1-P(X\geqslant80)-P(X\leqslant60)=0.6$，$P(X>60)=1-P(X\leqslant60)=0.8$，BC 正确，D 错误. 故选 ABC.

10. BC　若 $d(A,B)=1$，由题意可知 $d(A,B)=|a-1|+|b-1|=1$，令 $x=a-1$，$y=b-1$，则 $|x|+|y|=1$，作出其图象如图.

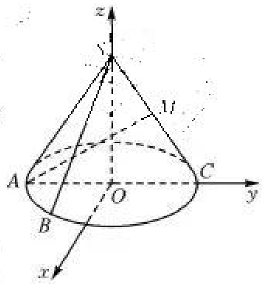


易知，点 $A(a,b)$ 的轨迹可由正方形 $|x|+|y|=1$ 右移 1 个单位长度，再上移 1 个单位长度得到，故 B 正确；对于 A，$s=a^2+b^2+2a+4b=(x+1)^2+(y+1)^2+2(x+1)+4(y+1)=x^2+y^2+4x+6y+8=(x+2)^2+(y+3)^2-5$，结合图象可得 $\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}$ 的最小值即为点 $(-2,-3)$ 到直线 $x+y+1=0$（即点 $(0,-1)$）的距离 $\frac{|-2-3+1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，此时 s 取得最小值 3，故 A 错误；对于 C，$\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}$ 的最大值即为点 $(-2,-3)$ 到点 $(1,0)$，$(0,1)$ 的距离中的最大值 $\max\{3\sqrt{2},2\sqrt{5}\}=2\sqrt{5}$，故 s 的最大值为 15，故 C 正确；若 $d(A,B)\leqslant 1$，则 $|x|+|y|\leqslant 1$ 表示正方形及其内部区域，易知其面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$，故 D 错误. 故选 BC.

11. AC　$OA=OC=OB=\sqrt{4^2-12}=2$，直线 SB 与平面 SAM 所成的角即直线 SB 与平面 SAC 所成的角，当 B 为弧 AC 中点时，易知 $\angle OSB$ 为所求，$\tan\angle OSB=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle OSB=\frac{\pi}{6}$，故 A 正确；

圆锥 SO 的内切球的半径即为 $\triangle SAC$ 内切圆的半径，$S_{\triangle SAC}=3\times\frac{1}{2}\times 4\times r=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，$r=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{32\sqrt{3}}{27}\pi$，故 B 错误；

棱长为 $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ 的正四面体可以从棱长为 $\frac{4}{3}$ 的正方体截，所以该正四面体和正方体的外接球是同一个外接球，$2R=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，即 $R=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，所以该正四面体可以放在圆锥 SO 的内切球内，故 C 正确；

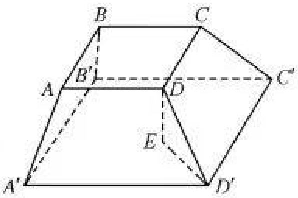


如图建立空间直角坐标系，$A(0,-2,0)$，$C(0,2,0)$，$S(0,0,2\sqrt{3})$，$B(x,y,0)$，则 $x^2+y^2=4$，$x\neq 0$，不妨设 M 为 SC 的中点，则 $M(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AM}=(0,3,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{SB}=(x,y,-2\sqrt{3})$，设直线 AM 与直线 SB 的夹角为 θ，$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{SB}\rangle|=\frac{|3y-6|}{8\sqrt{3}}$，因为 $-2<y<2$，所以 $\cos\theta\neq 0$，故不存在点 B，满足 $SB\perp AM$，故 D 错误.

另解：假设 $SB\perp AM$，过 B 作 BD 垂直于 AC，垂足为 D，连接 SD，因平面 $SAC\perp$ 底面 ABC，平面 $SAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，所以 $BD\perp$ 平面 SAC，又 $AM\subset$ 平面 SAC，所以 $BD\perp AM$，可得 $AM\perp$ 平面 SBD，所以 $SD\perp AM$，因 $\triangle SAC$ 为正三角形，M 为 SC 的中点，所以 $SC\perp AM$，即 C，D 两点重合，与题设矛盾，故 D 错误. 故选 AC.

12. ABD　由 $\log_a b>0$，可知 $\begin{cases}a>1,\\b>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<a<1,\\0<b<1,\end{cases}$ 又 $e^a b>e^b a\Rightarrow\frac{e^a}{a}>\frac{e^b}{b}$，令 $f(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$，$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，当 $\begin{cases}0<a<1,\\0<b<1,\end{cases}$ 且 $a>b$，此时 $\frac{e^a}{a}<\frac{e^b}{b}$ 与题意不符合；当 $\begin{cases}a>1,\\b>1,\end{cases}$ 且 $a>b$ 时，$\frac{e^a}{a}>\frac{e^b}{b}$，故 $a>b>1$. 令 $p(x)=\frac{x}{e^x}(x>1)$，$p'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$p(x)$ 单调递减，又 $a>b>1$，所以 $\frac{a}{e^a}<\frac{b}{e^b}<\frac{1}{e}$. 所以 $\frac{b}{e^a}<\frac{a}{e^a}<\frac{1}{e}$，所以 $\ln\frac{b}{e^a}<\ln\frac{1}{e}\Rightarrow\ln b-a<-1$，故 A 正确；令 $h(x)=\frac{x-1}{\ln x}(x>1)$，$h'(x)=\frac{x\ln x-x+1}{x\ln^2 x}$，记 $\varphi(x)=x\ln x-x+1(x>1)$，$\varphi'(x)=\ln x+1-1=\ln x>0$，所以 $\varphi(x)>\varphi(1)=0$，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(a)>h(b)$，即 $\frac{a-1}{\ln a}>\frac{b-1}{\ln b}$，即 $(a-1)\ln b>(b-1)\ln a$，所以 $\ln b^{a-1}>\ln a^{b-1}$，即 $b^{a-1}>a^{b-1}$，故 B 正确；$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,e)$ 时，$g(x)$ 单调递增，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g(x)$ 单调递减，

$a+1>b+1>2$，当 $2<b+1<a+1<e$ 时，$g(a+1)>g(b+1)$，即 $\frac{\ln(a+1)}{a+1}>\frac{\ln(b+1)}{b+1}$，即 $(b+1)\ln(a+1)>(a+1)\ln(b+1)$，故 C 错误；令 $t(x)=\frac{\ln x}{\ln(1+x)}$，$t'(x)=\frac{\frac{1}{x}\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\ln x}{\ln^2(1+x)}=\frac{(x+1)\ln(1+x)-x\ln x}{x(x+1)\ln^2(1+x)}$，令 $m(x)=x\ln x$，$m'(x)=1+\ln x>1$，即 $m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $(x+1)\ln(x+1)>x\ln x$，$t'(x)>0$，$t(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\frac{\ln a}{\ln(a+1)}>\frac{\ln b}{\ln(b+1)}$，即 $\log_{a+1}a>\log_{b+1}b$，故 D 正确. 故选 ABD.



13. $172\sqrt{46}$　如图，过 D 作 $DE\perp$ 平面 $A'B'C'D'$，E 为垂足，$D'E=8\sqrt{2}-5\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，$DE=\sqrt{8^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{46}$，$V=\frac{1}{3}(16^2+\sqrt{16^2\times10^2}+10^2)\times\sqrt{46}=172\sqrt{46}$.

14. $\frac{\pi}{6}$　由 $\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$，可得 $\sin\alpha\cos\beta=3\sin\beta\cos\alpha\Rightarrow\tan\alpha=3\tan\beta$. $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2\tan\beta}{1+3\tan^2\beta}=\frac{2}{3\tan\beta+\frac{1}{\tan\beta}}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{3\tan\beta\cdot\frac{1}{\tan\beta}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $3\tan\beta=\frac{1}{\tan\beta}$，即 $\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号. 又 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\alpha-\beta$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

15. $\frac{a^2}{b^2}$　设 $P(x_0,y_0)$，$C(x_c,y_c)$，$\triangle PF_1F_2$ 内切圆与 PF_1，PF_2，F_1F_2 分别相切于点 M,N,T，则 $|PM|=|PN|$，$|F_1M|=|F_1T|$，$|F_2N|=|F_2T|$，所以 $|F_1T|+|PN|+|NF_2|=a+c$，即 $|F_1T|+|PF_2|=a+c$，所以 $|F_1T|=(a+c)-|PF_2|$，又 $|PF_2|=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^2-2cx_0+c^2+b^2\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)}=\sqrt{e^2x_0^2-2cx_0+a^2}=a-ex_0$ (e 为椭圆的离心率)，而 $|F_1T|=$ [illegible]，所以 $x_c+c=(a+c)-(a-ex_0)=c+ex_0$，即 $x_c=\frac{c}{a}x_0$. $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}(2a+2c)\cdot y_c=\frac{1}{2}\cdot2c\cdot y_0$，所以 $y_c=\frac{c}{a+c}y_0$，$C\left(\frac{c}{a}x_0,\frac{c}{a+c}y_0\right)$，$k_{PC}=\frac{y_0-\frac{c}{a+c}y_0}{x_0-\frac{c}{a}x_0}=\frac{\frac{a}{a+c}y_0}{\frac{a-c}{a}x_0}=\frac{a^2}{a^2-c^2}\frac{y_0}{x_0}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{a^2}{b^2}k_{OP}$，所以 $\frac{k_{PC}}{k_{OP}}=\frac{a^2}{b^2}$.

16. 5　由题意可知 $xe^x-e^x\ln x+e^x>mx$，即 $x-\ln x+1>\frac{mx}{e^x}$ 恒成立，令 $f(x)=x-\ln x+1$，$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，当 $x\in(0,1)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=2$；令 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$，当 $x\in(0,1)$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}$. 所以 $\{f(x)-mg(x)\}_{\min}=f(1)-mg(1)=2-\frac{m}{e}>0$，得 $m<2e\in(5,6)$，所以正整数 m 的最大值为 5.

17. 解：(1) $2b\sin^2\frac{A+B}{2}=\sqrt{3}c\sin B\Rightarrow b[1-\cos(A+B)]=\sqrt{3}c\sin B$，

即 $b(1+\cos C)=\sqrt{3}c\sin B\Rightarrow\sin B(1+\cos C)=\sqrt{3}\sin C\sin B$. ………………………… 2 分

又 $\sin B\neq0$，所以 $1+\cos C=\sqrt{3}\sin C$，即 $2\cos^2\frac{C}{2}=2\sqrt{3}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$.

易知 $\frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $2\cos\frac{C}{2}\neq0$，可得 $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{3}\sin\frac{C}{2}$，即 $\tan\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$，即 $C=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 5 分

(2) 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 D 在边 AB 上，且不与 A,B 重合.

设 $\angle ACD=\alpha$，$\angle BCD=\frac{\pi}{3}-\alpha$，在 $\triangle ACD$ 中，$AC=\frac{CD}{\cos\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}$；

在 $\triangle BCD$ 中，$BC=\frac{CD}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$. ………………………… 7 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}CA\cdot CB\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{\cos\alpha}\cdot\frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha\cdot\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{4}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\sqrt{3},$$

由题意，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，则$\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

当 $2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$时，等号成立. …………………………………………………… 9 分

当△ABC 的面积取最小值时，设△ABC 内切圆的半径为 r，易得△ABC 为等边三角形，

则 $S_{\triangle ABC}=3\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{\cos\frac{\pi}{6}}\times r=\frac{4}{3}\sqrt{3}\Rightarrow r=\frac{2}{3}$，

所以△ABC 内切圆的面积 $S=\pi r^2=\frac{4}{9}\pi$. …………………………………………………… 10 分

18. (1)解：由 $a_n=\frac{2}{S_n+S_{n-1}}$，得 $S_n-S_{n-1}=\frac{2}{S_n+S_{n-1}}$，即 $S_n^2-S_{n-1}^2=2(n\geqslant 2)$；

又当 $n=2$ 时，$a_2=\frac{2}{S_2+S_1}=\frac{2}{a_2+2}$，即 $a_2^2+2a_2-2=0$，解得 $a_2=-1\pm\sqrt{3}$，

考虑到 $a_n>0$，可得 $a_2=\sqrt{3}-1$，从而 $S_2^2-S_1^2=(a_1+a_2)^2-a_1^2=(1+\sqrt{3}-1)^2-1=2$，

所以$\{S_n^2\}$是以 1 为首项，2 为公差的等差数列， …………………………………………………… 2 分

所以 $S_n^2=1+2(n-1)=2n-1$，又$\{a_n\}$是正项数列，所以 $S_n=\sqrt{2n-1}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3}$，

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 不符合 $n\geqslant 2$ 时 a_n 的形式. …………………………………………………… 5 分

所以 $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ \sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3}, n\geqslant 2.\end{cases}$ …………………………………………………… 6 分

(2)证明：$b_n=\frac{S_n^2+S_{n+1}^2}{S_n^4\cdot S_{n+1}^4}=\frac{2n-1+2n+1}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}=\frac{4n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$，…………… 10 分

$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]<\frac{1}{2}$. …………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)设事件 B=“任选一人答对”，A_i=“答题人来自于第 i 组”($i=1,2,3$)，

则样本空间 $\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3$，且 A_1,A_2,A_3 两两互斥， …………………………………………………… 2 分

根据题意得

$P(A_1)=0.3,P(A_2)=0.3,P(A_3)=0.4,P(B|A_1)=0.90,P(B|A_2)=0.95,P(B|A_3)=0.90.$ ………………… 4 分

由全概率公式得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.3\times 0.90+0.3\times 0.95+0.4\times 0.90=0.915$，

所以任选一人，此人答对该题的概率为 0.915. …………………………………………………… 6 分

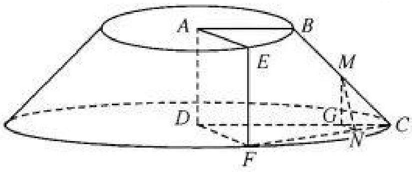
(2)由题可知，X 的可能取值为 0，1，2，3.

由题意得 $P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_3^2}{C_7^3}=\frac{12}{35}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$. …………………………………………………… 10 分

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$. ……………………………… 12 分

20. 解：(1)线段 CF 上存在一点 N，使 MN//平面 $AEFD$. 理由如下： …………………………………… 1 分



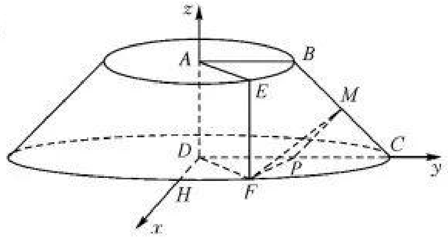
过 M 作 $MG\perp CD$，垂足为 G，M 为 BC 中点，又 $AB=\frac{1}{2}CD=2$，所以 $CG=1$，过 G 作一条平行 DF 的直线交 FC 于 N 点，此时 NG//FD. ……… 2 分

易知 MG//AD，$AD\subset$平面 $AEFD$，$MG\not\subset$平面 $AEFD$，所以 MG//平面 $AEFD$.

同理 GN//平面 $AEFD$，又 $MG\cap NG=G$，所以平面 MGN//平面 $AEFD$，所以 MN//平面 $AEFD$，

故线段 CF 上存在一点 N，使 $MN//$ 平面 $AEFD$，且 $\frac{CN}{CF}=\frac{CG}{CD}=\frac{1}{4}$. ………………………………………… 5 分

(2)作 $DH\perp CD$ 交下底圆 D 于 H，因为 $AD\perp DC,DH\perp DC,AD\perp DH$，如图，以 D 为原点，DH,DC,DA 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,0),A(0,0,2),F(2\sqrt{3},2,0),C(0,4,0)$，$B(0,2,2),P(0,2,0),M(0,3,1)$，



$\overrightarrow{DF}=(2\sqrt{3},2,0),\overrightarrow{DA}=(0,0,2),\overrightarrow{FP}=(-2\sqrt{3},0,0),\overrightarrow{MF}=(2\sqrt{3},-1,-1)$.

设平面 $AEFD$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2z=0,\\ 2\sqrt{3}x+2y=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},0)$；

设平面 MFP 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MF}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2\sqrt{3}x_1=0,\\ 2\sqrt{3}x_1-y_1-z_1=0,\end{cases}$

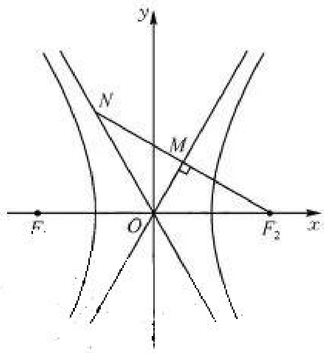
令 $y_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(0,1,-1)$. ………………………………………… 9 分

设平面 $AEFD$ 与平面 MFP 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

故平面 $AEFD$ 与平面 MFP 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$. ………………………………………… 12 分

21. (1)解：渐近线 $l_1:y=\frac{b}{a}x$，渐近线 $l_2:y=-\frac{b}{a}x$. ………………………………………… 1 分

设 O 为坐标原点，由题意，不妨设 M 在 l_1 上，N 在 l_2 上，OM 是线段 NF_2 的中垂线，



则 $\angle F_2OM=\angle NOM$.

所以 $\angle F_2OM=\angle NOM$. ………………………………………… 2 分

由对称性，$\angle F_2OM=\angle F_1ON$.

所以 $\angle F_2OM=\angle NOM=\angle F_1ON$，从而 $\angle F_2OM=\frac{\pi}{3}$.

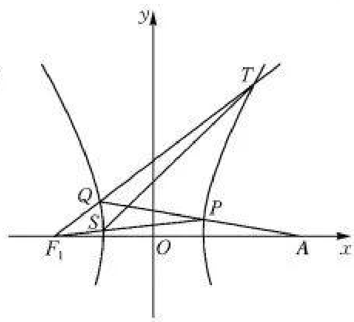
$F_2M=\frac{\left|\frac{b}{a}\times c\right|}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}}=b$，在 $\mathrm{Rt}\triangle F_2OM$ 中，$\sin\angle F_2OM=\frac{b}{c}=\frac{b}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解得 $b=2\sqrt{3}$. ………………………………………… 4 分

所以 $a^2=c^2-b^2=4^2-12=4$，故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. ………………………………………… 5 分

(2)证明：设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),S(x_3,y_3),T(x_4,y_4)$，设直线 $PQ:y=k(x-6)$.

可得直线 $PS:y=\frac{y_1}{x_1+4}(x+4)$. ………………………………………… 6 分



联立 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+4}(x+4),\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1,\end{cases}$

得 $[3(x_1+4)^2-y_1^2]x^2-8y_1^2x-16y_1^2-12(x_1+4)^2=0$，

则 $x_1+x_3=\frac{8y_1^2}{3(x_1+4)^2-y_1^2}$，又 $y_1^2=3x_1^2-12$，

所以 $x_1+x_3=\frac{8(3x_1^2-12)}{3(x_1+4)^2-(3x_1^2-12)}=\frac{24(x_1^2-4)}{24x_1+60}=\frac{2(x_1^2-4)}{2x_1+5}$，………………………………………… 7 分

所以 $x_3=-\frac{5x_1+8}{2x_1+5},y_3=\frac{y_1}{x_1+4}\cdot\left(-\frac{5x_1+8}{2x_1+5}+4\right)=\frac{y_1}{x_1+4}\cdot\frac{3x_1+12}{2x_1+5}=\frac{3y_1}{2x_1+5}$，

所以 $S\left(-\frac{5x_1+8}{2x_1+5},\frac{3y_1}{2x_1+5}\right)$，同理 $T\left(-\frac{5x_2+8}{2x_2+5},\frac{3y_2}{2x_2+5}\right)$. ………………………………………… 9 分

则 $k_{ST}=\frac{\frac{3y_1}{2x_1+5}-\frac{3y_2}{2x_2+5}}{-\frac{5x_1+8}{2x_1+5}-\left(-\frac{5x_2+8}{2x_2+5}\right)}=\frac{3y_1(2x_2+5)-3y_2(2x_1+5)}{-(5x_1+8)(2x_2+5)+(2x_1+5)(5x_2+8)}$

$=\frac{3k(x_1-6)(2x_2+5)-3k(x_2-6)(2x_1+5)}{-(5x_1+8)(2x_2+5)+(2x_1+5)(5x_2+8)}=\frac{3k(17x_1-17x_2)}{9(x_2-x_1)}=-\frac{17k}{3}$. ………………………………………… 10 分

直线 ST：$y-\frac{3y_1}{2x_1+5}=-\frac{17k}{3}\left[x-\left(-\frac{5x_1+8}{2x_1+5}\right)\right]$，

令 $y=0$，得 $x=-\frac{76x_1+190}{17(2x_1+5)}=-\frac{38}{17}$，所以直线 ST 过定点 $\left(-\frac{38}{17},0\right)$. …………………… 12 分

22. 解：(1)当 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)=xe^{x-1}-x-\ln x-1$，

所以 $f'(x)=(x+1)e^{x-1}-\frac{x+1}{x}=(x+1)\left(e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)$， …………………… 1 分

因为 $x>0$，$x+1>0$，

$g(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(1)=0$， …………………… 2 分

所以 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，
…………………… 3 分

所以当 $0<t\leqslant 1$ 时，$h(t)=f(t)=te^{t-1}-t-\ln t-1$；

当 $t>1$ 时，$h(t)=f(1)=-1$，

所以 $h(t)=\begin{cases}te^{t-1}-t-\ln t-1, & 0<t\leqslant 1,\\ -1, & t>1.\end{cases}$ …………………… 5 分

(2)①因为 $f(x)=axe^x-x-\ln x-1=axe^x-\ln(xe^x)-1$，

设 $t=xe^x$，则 $t=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 t 的取值范围是 $(0,+\infty)$，

设 $t_1=x_1e^{x_1}$，$t_2=x_2e^{x_2}$，$f(x)$ 有 2 个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 即方程 $at-\ln t-1=0$ 有 2 个不同实根 t_1,t_2，

即 $a=\frac{\ln t+1}{t}$ 有 2 个不同实根 t_1,t_2. …………………… 7 分

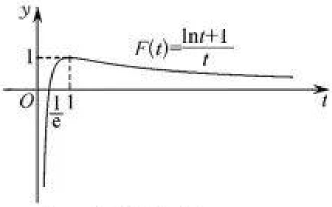
设 $F(t)=\frac{\ln t+1}{t}$，则 $F'(t)=-\frac{\ln t}{t^2}$，

当 $t\in(0,1)$ 时，$F'(t)>0$，$F(t)$ 单调递增；当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$F'(t)<0$，$F(t)$ 单调递减，

所以 $F(t)_{\max}=F(1)=1$，当 $t\to 0$ 且 $t>0$ 时，$F(t)\to-\infty$；当 $t\to+\infty$ 时，$F(t)\to 0$.

令 $F(t)=0$，得 $t=\frac{1}{e}$，所以函数 $y=F(t)$ 的图象过点 $\left(\frac{1}{e},0\right)$.

函数 $y=F(t)$ 的大致图象如图：



所以，仅当 $0<a<1$ 时，方程 $at-\ln t-1=0$ 有 2 个不同实根 t_1,t_2，

即 $f(x)$ 有 2 个零点时 a 的取值范围是 $(0,1)$. …………………… 9 分

②证明：要证 $e^{x_1+x_2}<\frac{1}{a^2x_1x_2}$，即证 $x_1e^{x_1}\cdot x_2e^{x_2}<\frac{1}{a^2}$，即证 $t_1t_2<\frac{1}{a^2}$，

由①得 $at_1=\ln t_1+1$，$at_2=\ln t_2+1$，所以 $a=\frac{\ln t_2-\ln t_1}{t_2-t_1}$，

所以问题转化为证明 $\frac{t_2-t_1}{\ln t_2-\ln t_1}>\sqrt{t_1t_2}$，即证 $\frac{t_2-t_1}{\sqrt{t_1t_2}}>2\ln\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}$，

即证 $\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}-\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}-2\ln\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}>0$. …………………… 10 分

设 $\sqrt{\frac{t_2}{t_1}}=m(m>1)$，即证 $m-\frac{1}{m}-2\ln m>0$，

设 $H(m)=m-\frac{1}{m}-2\ln m(m>1)$，则 $H'(m)=1+\frac{1}{m^2}-\frac{2}{m}=\left(\frac{1}{m}-1\right)^2>0$，

所以 $H(m)$ 为增函数，$H(m)>H(1)=0$，

所以 $t_1t_2<\frac{1}{a^2}$ 成立，即 $e^{x_1+x_2}<\frac{1}{a^2x_1x_2}$ 成立. …………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。