泸县四中2020级高三第二次诊断性模拟考试
数 学（理工类）参考答案：

1. A 2. B 3. D 4. C 5. D 6. D 7. A 8. B 9. B 10. C 11. D 12. B

13. $x-y+1=0$ 14. $\frac{22}{35}$ 15. $\frac{1}{4}$ 16. $-\frac{9}{28}$

17. 解：（1）设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，

由$\begin{cases}a_1+a_2+10=2a_3,\\S_3-a_2=10,\end{cases}$解得$a_1=q=2$，所以$a_n=2^n$，$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$．

（2）由（1）得$b_n=\log_2(S_n+2)\cdot a_n=(\log_2 2^{n+1})\cdot 2^n=(n+1)\cdot 2^n$，

所以$T_n=2\times 2+3\times 2^2+4\times 2^3+\cdots+(n+1)\times 2^n$，①

$2T_n=2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n+1)\times 2^{n+1}$，②

①-②得$-T_n=2^2+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot 2^{n+1}=2^2+\frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\cdot 2^{n+1}=-n\cdot 2^{n+1}$，所以$T_n=n\cdot 2^{n+1}$．

18.（1）由各小矩形的面积和为1可得：$(0.010+a+0.020+0.025+0.03)\times 10=1$，解之的$a=0.015$；由频率分布直方图可看出，甲的销售量比较分散，而乙较为集中，主要集中在$20-30$箱，故$s_1^2>s_2^2$．

（2）设事件A：在未来的某一天里，甲种酸奶的销售量不高于20箱；事件B：在未来的某一天里，乙种酸奶的销售量不高于20箱；事件C：在未来的某一天里，甲、乙两种酸奶的销售量恰好一个高于20箱且另一个不高于20箱．则$P(A)=0.20+0.10=0.3$，$P(B)=0.10+0.20=0.3$．所以

$P(C)=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})=0.42$．

（3）由题意可知，X的可能取值为0，1，2，3．

$P(X=0)=C_3^0\times 0.3^0\times 0.7^3=0.343$，　$P(X=1)=C_3^1\times 0.3^1\times 0.7^2=0.441$，

$P(X=2)=C_3^2\times 0.3^2\times 0.7^1=0.189$，$P(X=3)=C_3^3\times 0.3^3\times 0.7^0=0.027$．

所以X的分布列为

X	0	1	2	3
P	0．343	0．441	0．189	0．027

所以 X的数学期望$EX=0\times 0.343+1\times 0.441+2\times 0.189+3\times 0.027=0.9$．

19. 解：（1）由题意，O_1, O_2分别是圆台上下底面的圆心，可得$O_1O_2\perp$底面O_2，

因为$AP\subset$底面O_2，所以$AP\perp O_1O_2$，

又由点P是下底面内以AO_2为直径的圆上的一个动点，可得$AP\perp O_2P$，

又因为$O_1O_2\cap O_2P=O_2$，且$O_1O_2, O_2P\subset$平面PO_1O_2，所以$AP\perp$平面PO_1O_2，

因为$AP\subset$平面APO_1，所以平面$APO_1\perp$平面PO_1O_2．

（2）以O_2为原点，建立空间直角坐标系，如图所示，

因为$O_1O_2=2$，则$AB=2O_1O_2=4$，$\angle PAB=45°$，

可得$A(0,-2,0), B(0,2,0), O_1(0,0,2), P(1,-1,0)$，所以$\overrightarrow{AP}=(1,1,0), \overrightarrow{AO_1}=(0,2,2)$，

设平面APO_1的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AO_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1+y_1=0\\2y_1+2z_1=0\end{cases}$，令$y_1=1$，可得$x_1=-1, z_2=-1$，所以$\overrightarrow{n_1}=(-1,1,-1)$，

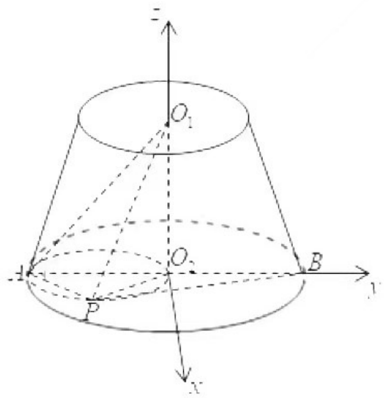
又由$\overrightarrow{PO_1}=(-1,1,2), \overrightarrow{PB}=(-1,3,0)$，

设平面APO_1的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PO_1}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x_2+y_2+2z_2=0\\-x_2+2y_2=0\end{cases}$，令$y_2=1$，可得$x_2=3,z_2=1$，所以$\vec{n_2}=(3,1,1)$，

所以$\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\dfrac{-3}{\sqrt{3}\times\sqrt{11}}=-\dfrac{\sqrt{33}}{11}$，

因为二面角$A-PO_1-B$为钝角，所以二面角$A-PO_1-B$的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{33}}{11}$.



20.（1）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

当$AB//l$时，AB的方程为$y-2=\dfrac{1}{2}(x-1)$即$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$，

由$\begin{cases}x^2=2py\\y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}\end{cases}$可得$x^2-px-3p=0$，$\Delta>0$，

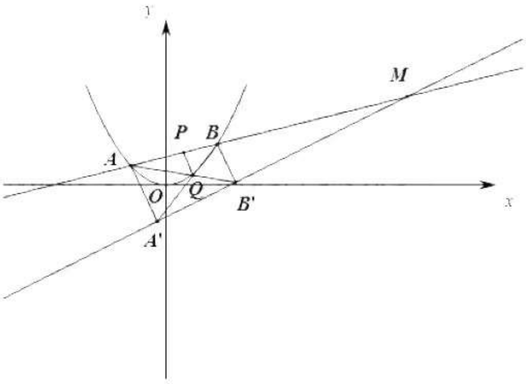
$\because P$为AB的中点，$\therefore\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{p}{2}=1$，$\therefore p=2$，$C$的方程为$x^2=4y$；

（2）证明：当$AB//l$时，则四边形$ABB'A'$为矩形，Q为AB'的中点，

由（1）可知P为AB的中点，

$\therefore PQ$为$\triangle ABB'$的中位线，$PQ//AA'//BB'$；

当AB与l不平行时，设AB与l相交于$M(x_0,y_0)$，不妨设从左至右依次为点A、B、M，如图，



由题意 $AA' // BB'$ 显然成立，只要证 $PQ // BB'$，即证 $\dfrac{|AP|}{|PB|}=\dfrac{|AQ|}{|QB'|}$，

又 $AA' // BB'$，$\therefore \dfrac{|AQ|}{|QB'|}=\dfrac{|AA'|}{|BB'|}=\dfrac{|AM|}{|BM|}$，$\therefore$ 只要证 $\dfrac{|AP|}{|PB|}=\dfrac{|AM|}{|BM|}$，

即证 $\dfrac{1-x_1}{x_2-1}=\dfrac{x_0-x_1}{x_0-x_2}$，即证 $2x_0+2x_1x_2-(x_1+x_2)(x_0+1)=0$.

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)+2$，则 $k\neq\dfrac{1}{2}$，由 $\begin{cases} y=k(x-1)+2 \\ y=\dfrac{1}{2}x-2 \end{cases}$，解得 $x_0=\dfrac{2k-8}{2k-1}$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1)+2 \\ x^2=4y \end{cases}$ 可得 $x^2-4kx+4k-8=0$，$\Delta>0$，$\therefore x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=4k-8$，

$\therefore 2x_0+2x_1x_2-(x_1+x_2)(x_0+1)=\dfrac{4k-16}{2k-1}+8k-16-4k\left(\dfrac{2k-8}{2k-1}+1\right)=0$，得证；

综上，$PQ // AA' // BB'$.

21.（1）解：$f(x)$ 的定义域为 R，$f'(x)=e^x-a$.

①当 $a\leq0$ 时，$f'(x)\geqslant e^x>0$，所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增，故 $f(x)$ 至多有一个零点，不符合题意；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $x<\ln a$；令 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)$

（i）若 $0<a\leq e$，则 $f(x)_{\min}=a(1-\ln a)\geqslant0$，故 $f(x)$ 至多有一个零点，不符合题意；

（ii）若 $a>e$，则 $\ln a>1$，$f(x)_{\min}=a(1-\ln a)<0$，

由（i）知 $e^x-ex\geq0$，$\therefore e^{\ln a}-e\ln a=a-\ln a\geqslant0$，

$\therefore a-2\ln a>a-e\ln a\geq0$，$f(2\ln a)=a^2-2a\ln a=a(a-2\ln a)>0$.

又 $\because f(0)=1>0$，$0<\ln a<2\ln a$，故 $f(x)$ 存在两个零点，分别在 $(0,\ln a)$，$(\ln a,2\ln a)$ 内.

综上，实数 a 的取值范围为 $(e,+\infty)$.

（2）证明：由题意得$\begin{cases} e^{x_1}=ax_1 \\ e^{x_2}=ax_2 \end{cases}$，令$t=x_2-x_1>0$，

两式相除得$e^t=e^{x_2-x_1}=\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{x_1+t}{x_1}$，变形得$x_1=\dfrac{t}{e^t-1}$.

欲证$x_2-x_1<\dfrac{2}{x_1}-2$，即证$t<\dfrac{2\left(e^t-1\right)}{t}-2$，即证$\dfrac{t^2+2t+2}{e^t}<2$.

记$h(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{e^t}(t>0)$，$h'(t)=\dfrac{(2t+2)e^t-\left(t^2+2t+2\right)e^t}{e^t}=-\dfrac{t^2}{e^t}<0$，故$h(t)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

从而$h(t)<h(0)=2$，即$\dfrac{t^2+2t+2}{e^t}<2$，所以$x_2-x_1<\dfrac{2}{x_1}-2$得证.

方法2：由题意得：$\begin{cases} e^{x_1}=ax_1 \\ e^{x_2}=ax_2 \end{cases}$

由（1）可知x_1，$x_2>0$，令$t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，则$x_2=tx_1$，则$\begin{cases} e^{x_1}=ax_1 \\ e^{tx_1}=atx_1 \end{cases}$，两式相除得$e^{(t-1)x_1}=t$，$x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}$，$x_2=\dfrac{t\ln t}{t-1}$，

欲证$x_2-x_1<\dfrac{2}{x_1}-2$，即证$\ln t<\dfrac{2(t-1)}{\ln t}-2$，即证$(\ln t)^2+2\ln t-2t+2<0$.

记$g(t)=(\ln t)^2+2\ln t-2t+2(t>1)$，$g'(t)=2\ln t\cdot\dfrac{1}{t}+\dfrac{2}{t}-2=\dfrac{2(\ln t-t+1)}{t}$，

令$h(t)=\ln t-t+1(t>1)$，$h'(t)=\dfrac{1}{t}-1=\dfrac{1-t}{t}<0$，故$h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减，则$h(t)<h(1)=0$，

即$g'(t)<0$，$\therefore g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减，从而$g(t)<g(1)=0$，

$\therefore (\ln t)^2+2\ln t-2+2<0$得证，即$x_2-x_1<\dfrac{2}{x_1}-2$得证.

22.（1）∵$\rho=2\cos\theta$，∴曲线C_2的直角坐标方程为∴$(x-1)^2+y^2=1$，

∵α是曲线C_1：$\begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases}$的参数，∴$C_1$的普通方程为$x^2+(y-1)^2=t^2$，

∵C_1与C_2有且只有一个公共点，∴$|t|=\sqrt{2}-1$或$|t|=\sqrt{2}+1$，

∴C_1的普通方程为$x^2+(y-1)^2=(\sqrt{2}-1)^2$或$x^2+(y-1)^2=(\sqrt{2}+1)^2$

（2）∵t是曲线C_1：$\begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases}$的参数，∴$C_1$是过点$A$（0，1）的一条直线，

设与点P，Q相对应的参数分别是t_1，t_2，把$\begin{cases} x=t\cos\alpha \\ y=1+t\sin\alpha \end{cases}$，代入$(x-1)^2+y^2=1$得$t^2+2(\sin\alpha-\cos\alpha)t+1=0$，∴$\begin{cases} t_1+t_2=-2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ t_1t_2=1 \end{cases}$

$\therefore \frac{1}{|AP|}+\frac{1}{|AQ|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=|t_1|+|t_2|=|t_1+t_2|=2\sqrt{2}\,|sin（\alpha-\frac{\pi}{4}）|\le 2\sqrt{2}$，

当$\alpha=\frac{3\pi}{4}$时，$\triangle=4（sin\alpha-cos\alpha）^2-4=4>0$，

$\frac{1}{|AP|}+\frac{1}{|AQ|}$取最大值$2\sqrt{2}$.

23.（1）不等式$f(x)<6-|x-2|$，即$|3x+2|+|x-2|<6$.

当$x<-\frac{2}{3}$时，即$-3x-2-x+2<6$，得$-\frac{3}{2}<x<-\frac{2}{3}$；

当$-\frac{2}{3}\le x\le 2$时，即$3x+2-x+2<6$，得$-\frac{3}{2}\le x<1$；

当$x>2$时，即$3x+2+x-2<6$，无解.

综上，原不等式的解集为$\left(-\frac{3}{2},1\right)$.

（2）$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+n)=\frac{1}{4}\left(1+1+\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)\ge 1$.

令$g(x)=|x-a|-f(x)=|x-a|-|3x+2|=\begin{cases}2x+2+a, & x<-\frac{2}{3}\\ -4x-2+a, & -\frac{2}{3}\le x\le a,\\ -2x-2-a, & x>a.\end{cases}$

结合函数$g(x)$的图象易知：当$x=-\frac{2}{3}$时，$g(x)_{\max}=\frac{2}{3}+a$.

$\therefore$要使不等式恒成立，只需$g(x)_{\max}=\frac{2}{3}+a\le 1$，即$0<a\le\frac{1}{3}$，故所求实数$a$的取值范围是$\left(0,\frac{1}{3}\right]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。