华中师大一附中 2023 届高三第二次学业质量评价检测

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	B	A	D	D	C	C	ACD	AC	BC	ACD

三、填空题

13. $\frac{2}{3}$　　**14.** $2+\sqrt{3}$　　**15.** $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$　　**16.** $\left[\frac{e^2}{2e^2-1},1\right)$

选择题与填空题详解：

1．方程的 $\Delta=4-8=-4$，则 $z=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$，所以 $|z|=\sqrt{2}$，故选 B

2．由题意，$M=\{x\in Z|\ 0<x<10\}$，$N=\{x\in Z|\ x>\log_2 100\}$，$\because$ $6<\log_2 100<7$，$\therefore M\cap N=\{7,8,9\}$，故选 C

3.易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0且x\neq\pm 1\}$，$\because f(e)=\frac{1}{e-1}, f(-e)=\frac{1}{-e-1}$，

$\therefore f(e)\neq f(-e)且f(e)\neq -f(e)$，所以函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数，排除 A；易知当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，故排除 C；

因为 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3\ln 2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\ln 2}$，所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$，所以排除 D．故选 B.

4．由题意可得正方体外接球的直径 $|AB|=4\sqrt{3}$，设点 O 为正方体外接球的球心，则 O 为 AB 的中点，$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{PO}^2-(2\sqrt{3})^2\geq 2^2-(2\sqrt{3})^2=-8$ 故选：A.

5．$\because$ $f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$，$\therefore$ $f(x)$ 是偶函数．当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f'(x)=\sin x+x\cos x>0$，

$\therefore$ $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，$\because$ $f(x)$ 是偶函数，$\therefore$ $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上单调递减，$\therefore$由 $f(x_1)>f(x_2)$ 可

得 $|x_1|>|x_2|$，$\therefore$ $x_1{}^2>x_2{}^2$，故选 D.

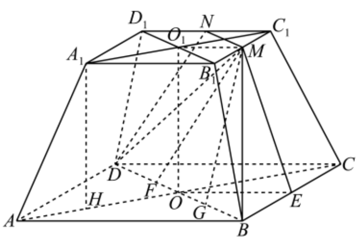
6．由题意 $AF_1\perp AB$，且 $\cos\angle ABF_1=\frac{3}{5}=\frac{|AB|}{|BF_1|}$，$\therefore |AB|:|AF_1|:|BF_1|=3:4:5$，可设 $|AB|=3k$，$|AF_1|=4k$，

$|BF_1|=5k$ 由 $|AB|+|AF_1|+|BF_1|=|AF_2|+|BF_2|+|AF_1|+|BF_1|=4a$，则 $4k+3k+5k=4a$，即 $3k=a$，

$\therefore |AB|=a,|AF_1|=\frac{4}{3}a,|AF_2|=\frac{2}{3}a$，$\therefore |F_1F_2|=\sqrt{|AF_1|^2+|AF_2|^2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}a$，$\therefore$ $e=\frac{2c}{2a}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{3}a}{2a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，故选 D.

7．设该正四棱台上、下底面的中心分别为 O_1，O，设 $AB=2A_1B_1=4x$，高 $O_1O=h$，

作 $A_1H\perp AC$，则 $A_1O_1=\frac{1}{2}\sqrt{(2x)^2+(2x)^2}=\sqrt{2}x, AO=\frac{1}{2}\sqrt{(4x)^2+(4x)^2}=2\sqrt{2}x$.在梯形



A_1O_1OA 中，$A_1A^2=AH^2+A_1H^2 \Rightarrow 12=(2\sqrt{2}x-\sqrt{2}x)^2+h^2 \Rightarrow h^2=12-2x^2$，所以该四棱台的体积为

$$V=\frac{1}{3}\left(16x^2+\sqrt{16x^2\cdot 4x^2}+4x^2\right)\cdot\sqrt{12-2x^2}=\frac{28}{3}x^2\cdot\sqrt{12-2x^2}=\frac{28}{3}\cdot\sqrt{x^2\cdot x^2\cdot(12-2x^2)}\le\frac{28}{3}\cdot\sqrt{(\frac{x^2+x^2+12-2x^2}{3})^3}=\frac{28}{3}\cdot 8$$

当且仅当 $x^2=3-2x^2$，即 $x=2$ 时取等号，此时 $AB=8, A_1B_1=4, O_1O=2$.

取 C_1D_1 的中点 N，连接 NM、ND，显然有 $MN//D_1B_1//DB$，$MN\not\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $MN//$ 平面 $ABCD$，因此平面 $MBDN$ 就是截面. $MN=\frac{1}{2}B_1D_1=2\sqrt{2}, BD=8\sqrt{2}$，设 MN 与 A_1C_1 交于点 R，则 $OR=\sqrt{OO_1^2+O_1R^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，所以梯形 $MBDN$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{6}=10\sqrt{3}$，故选 C.

8.由题意可得 $f'(x)=x^2-a_{n+1}\cos x+a_n+2$ 有唯一的零点，$\because f'(x)$ 为偶函数，

$\therefore f'(0)=0$，即 $a_{n+1}-a_n=2$，$n\in\mathrm{N}^*$，所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，

又 $\because g(x)=12x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\pi x)-\frac{1}{2}\cos(\pi x)=12x+\sin\pi(x-\frac{1}{6})$，$g(\frac{1}{3}-x)=12(\frac{1}{3}-x)+\sin\pi(\frac{1}{6}-x)$，

$\therefore g(x)+g(\frac{1}{3}-x)=4$，$\therefore$ 函数 $g(x)$ 的图像关于点 $(\frac{1}{6},2)$ 对称. 又 $\because g'(x)=12+\pi\cos\pi(x-\frac{\pi}{6})>0$，$\therefore g(x)$ 在 R 上单调递增. 由题意可得 $[g(a_1)+g(a_9)]+[g(a_2)+g(a_8)]+[g(a_3)+g(a_7)]+[g(a_4)+g(a_6)]+g(5)=18$，

$\because g(x)$关于（$\frac{1}{3}$,2）对称，且 $a_1+a_9=a_2+a_8=a_3+a_7=a_4+a_6=2a_5$，下证 $g(a_1)+g(a_9)=4$.

即证 $g(a_1)=4-g(a_9)$，即证 $g(a_1)=g(\frac{1}{3}-a_9)$，$\because g(x)$ 在 R 上单调递增，$\therefore$ 即证 $a_1=\frac{1}{3}-a_9$，即证 $a_1+a_9=\frac{1}{3}$，

若 $a_1+a_9>\frac{1}{3}$，则 $a_1>\frac{1}{3}-a_9$，$\because g(x)$ 在 R 上单调递增，$\therefore g(a_1)>g(\frac{1}{3}-a_9)=4-g(a_9)$，$\therefore g(a_1)+g(a_9)>4$

同理可得 $g(a_2)+g(a_8)>4$，$g(a_3)+g(a_7)>4, g(a_4)+g(a_6)>4, 2g(a_5)>4$，$\therefore g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_9)>18$，不满足题意；若 $a_1+a_9<\frac{1}{3}$，同理可得 $g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_9)<18$，故 $a_1+a_9=\frac{1}{3}$，$\because a_1+a_9=2a_5$，$\therefore a_5=\frac{1}{6}$，故选 C

9.$\because \chi^2=\frac{88\times(33\times7-10\times38)^2}{43\times45\times71\times17}\approx0.837<2.706$，$\therefore$ 根据小概率 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，两校的数学成绩优秀率没有差异。数据扩大 10 倍的 2×2 列联表为

学校	数学成绩		合计（单位：人）
	不优秀	优秀	
甲校	330	100	430
乙校	380	70	450
合计（单位：人）	710	170	880

根据扩大 10 倍之后列联表中的数据，经计算得到 $\chi^2=\frac{880\times(330\times70-100\times380)^2}{430\times450\times710\times170}\approx8.365>2.706$，$\therefore$ 根据小概率 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，两校的数学成绩优秀率有差异，该推断犯错误的概率不超过 0.1，但 $\chi^2=8.365<10.828$，

根据小概率$\alpha=0.001$的独立性检验，两校的数学成绩优秀率没有差异。故选：ACD

10．设人的智力曲线、情绪曲线和体力曲线分别为$f\left(x\right)=\sin\omega_1 x, g\left(x\right)=\sin\omega_2 x, h\left(x\right)=\sin\omega_3 x$，

则$\omega_1=\dfrac{2\pi}{33}, \omega_2=\dfrac{2\pi}{28}=\dfrac{\pi}{14}, \omega_3=\dfrac{2\pi}{23}$，A 项，第 35 天时，$g\left(35\right)=\sin\dfrac{\pi}{14}\times 35=\sin\dfrac{5\pi}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi\right)=1$，故 E 处于最高点，A 正确；B 项，设$F\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)=\sin\dfrac{2\pi}{33}x-\sin\dfrac{\pi}{14}x$，因为$F\left(33\right)=\sin 2\pi-\sin\dfrac{33\pi}{14}=-\sin\dfrac{5\pi}{14}<0$，

$F\left(42\right)=\sin\dfrac{28\pi}{11}-\sin 3\pi=\sin\dfrac{6\pi}{11}>0$，由零点存在性定理可得存在$x_0\in\left(33,42\right)$，使得$F\left(x_0\right)=0$，故此时智力曲线 I 与情绪曲线 E 相交，B 错误；C 项，当$x\in\left(46,50\right)$时$\dfrac{2\pi}{23}x\in\left(4\pi,\dfrac{100\pi}{23}\right)$，因为$\dfrac{100\pi}{23}<\dfrac{9\pi}{2}$，所以根据正弦函数的性质可得此时$h\left(x\right)=\sin\dfrac{2\pi}{23}x$单调递增，故处于上升期，C 正确；D 项，因为$h(320)=\sin(\dfrac{2\pi}{23}\times 320)\neq 0$，所以体力曲线 P 不关于(320,0)对称，D 错误，故选 AC

11.$\because$ 异面直线a与直线b所成角为60°，$\therefore$ 过点P与直线a,b所成角均为60°的直线有 3 条，故选项 A 错误；

$\because$ 平面α与平面β所成的二面角为80°，$\therefore$ 平面α与β的法向量$\vec{m}$与$\vec{n}$的夹角为80°或100°，$\because$ 过点P的直线l与平面α,β所成角都是30°，$\therefore$ 直线l与法向量$\vec{m},\vec{n}$所在直线所成的角均为60°，这样的直线有 4 条，故 B 正确；

同理可判断选项 C 正确；$\because$ 过点P与平面α成60°角的所有直线，形成以 P 为顶点，与圆锥中轴线夹角为30°，且底面在α上的圆锥的母线，与直线 a 成60°的所有直线，形成以 P 为顶点，且与圆锥中轴线夹角为60°的圆锥的母线，两个圆锥相交于两条母线，$\therefore$ 满足条件的直线有且只有 2 条，故 D 错误.故选 BC

12．$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{b_n+\dfrac{1}{a_n}}{a_n+\dfrac{1}{b_n}}=\dfrac{\dfrac{a_nb_n+1}{a_n}}{\dfrac{a_nb_n+1}{b_n}}=\dfrac{b_n}{a_n}$，$\therefore \dfrac{a_{n+2}}{b_{n+2}}=\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n}{b_n}$，$\therefore \dfrac{a_n}{b_n}=\begin{cases}4, n=2k-1, k\in N^* \\ \dfrac{1}{4}, n=2k, k\in N^*\end{cases}$，$\therefore \dfrac{a_2}{b_2}+\dfrac{a_3}{b_3}=\dfrac{17}{4}$，

故 A 正确；$\dfrac{{a_{100}}^2+{b_{100}}^2}{a_{100}\cdot b_{100}}=\dfrac{a_{100}}{b_{100}}+\dfrac{b_{100}}{a_{100}}=\dfrac{1}{4}+4=\dfrac{17}{4}$，故 B 错误；

由题意得：$a_{n+1}b_{n+1}=\left(b_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\left(a_n+\dfrac{1}{b_n}\right)=a_nb_n+2+\dfrac{1}{a_nb_n}\geq 2+2\sqrt{a_nb_n\cdot\dfrac{1}{a_nb_n}}=4$，当且仅当$a_nb_n=\dfrac{1}{a_nb_n}$时，取等号；所以$a_nb_n\geq 4$，即$0<\dfrac{1}{a_nb_n}\leq\dfrac{1}{4}$，所以$a_{100}\cdot b_{100}=2+a_{99}b_{99}+\dfrac{1}{a_{99}b_{99}}=2\times 2+a_{98}b_{98}+\dfrac{1}{a_{98}b_{98}}+\dfrac{1}{a_{99}b_{99}}$

$=\ldots=2\times 99+a_1b_1+\dfrac{1}{a_1b_1}+\dfrac{1}{a_2b_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{99}b_{99}}=200+\dfrac{1}{a_2b_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{99}b_{99}}>200$，

又$\because a_nb_n\leq\dfrac{1}{4}$，$\therefore a_{100}\cdot b_{100}<200+\dfrac{1}{4}\times 98=\dfrac{449}{2}$，故 C 正确；

$\because a_{n+1}-b_{n+1}=(b_n+\dfrac{1}{a_n})-(a_n+\dfrac{1}{b_n})=(b_n-a_n)\cdot\dfrac{1+a_nb_n}{a_nb_n}$，

$\therefore (a_{n+1}-b_{n+1})^2=(b_n-a_n)^2\cdot(\dfrac{1+a_nb_n}{a_nb_n})^2=(b_n-a_n)^2\cdot\dfrac{1+2a_nb_n+a_n^2b_n^2}{a_n^2b_n^2}=(b_n-a_n)^2\cdot\dfrac{\frac{1}{a_nb_n}+2+a_nb_n}{a_nb_n}=(b_n-a_n)^2\cdot\dfrac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}$

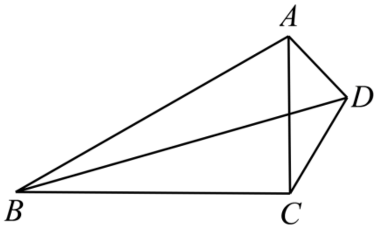
$\therefore \dfrac{(a_{n+1}-b_{n+1})^2}{a_{n+1}b_{n+1}}=\dfrac{(b_n-a_n)^2}{a_nb_n}=\dfrac{(b_{n-1}-a_{n-1})^2}{a_{n-1}b_{n-1}}=\cdots=\dfrac{(b_1-a_1)^2}{a_1b_1}=\dfrac{9}{4}$，$\therefore (a_{100}-b_{100})^2=\dfrac{9}{4}a_{100}\cdot b_{100}>\dfrac{9}{4}\cdot 200=450$，

又$\because a_{n+1}-b_{n+1}=(b_n-a_n)\cdot\dfrac{1+a_nb_n}{a_nb_n}$，而$\dfrac{1+a_nb_n}{a_nb_n}>0$，$\therefore a_{n+1}-b_{n+1}$与$b_n-a_n$同号，即$a_{n+1}-b_{n+1}$与$a_n-b_n$异号，

$\because a_1-b_1=2-\dfrac{1}{2}>0$，$\therefore a_{100}-b_{100}<0$，$\therefore$由$(a_{100}-b_{100})^2>450$可得$a_{100}-b_{100}<-15\sqrt{2}$，故 D 正确.综上，正确选项为 ACD

13．因为随机变量$X\sim B(6,p)$，所以$E(X)=6p$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且$P(Y\geq 4)=\dfrac{1}{2}$，所以$E(Y)=\mu=4$，

所以$6p=4$，解得：$p=\dfrac{2}{3}$.故答案为：$\dfrac{2}{3}$



14．由$BC=\sqrt{3}AC\Rightarrow\dfrac{BC}{AC}=\sqrt{3}=\tan\angle BAC$可知，$\Delta ABC$是直角三角形，

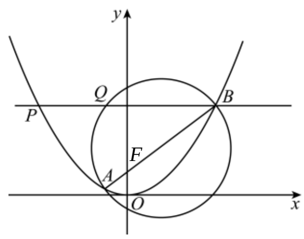
设$\angle ACD=\theta$，则$AC=2\cos\theta,\therefore BC=2\sqrt{3}\cos\theta$. 在$\triangle BCD$中，由余弦定理得

$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos(90^\circ+\theta)=(2\sqrt{3}\cos\theta)^2+1^2+2\cdot2\sqrt{3}\cos\theta\cdot1\cdot\sin\theta=12\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin2\theta+1$

$=12\cdot\dfrac{1+\cos2\theta}{2}+2\sqrt{3}\sin2\theta+1=6\cos2\theta+2\sqrt{3}\sin2\theta+7=4\sqrt{3}\sin(2\theta+\dfrac{\pi}{3})+7$

当$2\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$时，即$\theta=\dfrac{\pi}{12}$时，$BD^2$取得最大值$7+4\sqrt{3}$，$\therefore BD$长度的最大值为$2+\sqrt{3}$

15．如图，易知过点A,B且与直线l相切的圆就是以AB为直径的圆，



设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$Q(x_1,y_2),P(-x_2,y_2)$，由$\overrightarrow{QB}=2\overrightarrow{PQ}$，可得$x_2=-3x_1$

设直线AB的方程为$y=kx+1$，代入$x^2=4y$有$x^2-4kx-4=0$，

所以$x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4$，结合$x_2=-3x_1$，得$k^2=\dfrac{1}{3}$.，故答案为：$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

16. $f(x)<0\Leftrightarrow a(xe^x-x+1)<e^x\Leftrightarrow x-\dfrac{x-1}{e^x}<\dfrac{1}{a}$，令$g(x)=x-\dfrac{x-1}{e^x}$，则$g'(x)=1-\dfrac{2-x}{e^x}=\dfrac{e^x-2+x}{e^x}$，令

$r(x)=e^x-2+x$，则$r(x)$在R上单调递增，且$r(0)=-1<0,r(1)=e-1>0$，$\therefore$存在$x_0\in(0,1)$，当$x\in(-\infty,x_0)$

时$r(x)<0$，$\therefore g'(x)<0$，$\therefore g(x)$单调递减，当$x\in(x_0,+\infty)$时$r(x)>0$，$\therefore g'(x)>0$，$\therefore g(x)$单调递增，$\because$

$g(0)=g(1)$，$\therefore$只需$\dfrac{1}{a}>1$且$\dfrac{1}{a}\leq g(-1)$且$\dfrac{1}{a}\leq g(2)$，解得$a\in\left[\dfrac{e^2}{2e^2-1},1\right)$

四、解答题：

17．解：（1）$\because$函数$f(x)$在区间$[0,1]$上是单调函数，$\therefore\dfrac{T}{2}\geq1$，即$\dfrac{\pi}{\omega}\geq1$，$\therefore 0<\omega\leq\pi$，

$\because f\left(x\right)\le f\left(1\right)\left(x\in R\right)$恒成立，$\therefore x=1$时 $f\left(x\right)$取得最大值，$\therefore \omega\cdot 1+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore \omega=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k\in Z)$，$\because 0<\omega\le\pi$，$\therefore \omega=\dfrac{\pi}{4}$ ……………………………………………………………4 分

（2）$\because f^2\left(x\right)=2\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=1-\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\sin\dfrac{\pi x}{2}$，则函数 $y=f^2\left(x\right)$的最小正周期为$\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，

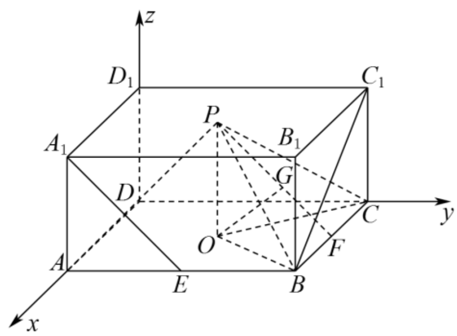
$\therefore f^2\left(1\right)+f^2\left(2\right)+f^2\left(3\right)+f^2\left(4\right)=4+\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\pi+\sin\dfrac{3\pi}{2}+\sin 2\pi=4$，

$f^2(1)+f^2(2)+f^3(3)=3+\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\pi+\sin\dfrac{3\pi}{2}=3$，$\because 2023=505\times 4+3$，

$\therefore f^2\left(1\right)+f^2\left(2\right)+f^2\left(3\right)+\cdots+f^2\left(2023\right)=505\times 4+f^2(1)+f^2(2)+f^2(3)=2020+3=2023$ ………10 分

18.解：（1）因为$DA\perp DC,DA\perp DD_1,DC\perp DD_1$，所以以点 D 为原点，

以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$为$x,y,z$轴正方向建立空间直角坐标系，设 $AA_1=2$，则 $AB=AD=2\sqrt{2}$，



$\therefore B(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0),C(0,2\sqrt{2},0),P(\sqrt{2},\sqrt{2},2),E(2\sqrt{2},\sqrt{2},0),A_1(2\sqrt{2},0,2)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1K}=(0,\sqrt{2},-2)$，$\overrightarrow{CB}=(2\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{2},\sqrt{2},-2)$，设平面 PBC 的

法向量为$\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$，所以$2\sqrt{2}x=0,\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-2z=0$，取 $y=1$，

则 $x=0,z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\vec{n}=(0,1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$为平面 PBC 的一个法向量，

$P\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2\right)$，$A\left(2\sqrt{2},0,0\right)$，所以$\overrightarrow{PA}=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2},-2\right)$，所以$\cos<\overrightarrow{PA},\vec{n}>=\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

设直线 PA 与平面 PBC 所成角为θ，则$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\therefore$直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ………………6 分

（2）设 $AA_1=2$，设ΔPBC 的重心为G，取线段 BC 的中点为 F，则 $F\left(k,2k,0\right)$，$P\left(k,k,2\right)$，所以$\overrightarrow{OP}=\left(0,0,2\right)$，

$\overrightarrow{PF}=\left(0,k,-2\right)$，$\therefore \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OP}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PF}=\left(0,\dfrac{2}{3}k,\dfrac{2}{3}\right)$，由(1) $\vec{n}=\left(0,1,\dfrac{k}{2}\right)$为平面 PBC 的一个法向量，因为 O

在平面 PBC 内的射影恰好为ΔPBC 的重心，所以$\overrightarrow{OG}//\vec{n}$，所以$\dfrac{\frac{2}{3}k}{1}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{k}{2}}$，所以 $k=\sqrt{2}$ ………………………12 分

19.解：（1）因为$S_n^2-S_{n-1}^2=2n^2a_n=2n^2\left(S_n-S_{n-1}\right),n\ge 2$，又数列$\{a_n\}$各项均不为零，所以$S_n+S_{n-1}=2n^2$.

当 $n=2$ 时，$S_2+S_1=a_1+a_2+a_1=8$，所以 $a_2=6$ ………………………………………………………………2 分

当 $n=3$ 时，$S_3+S_2=2\left(a_1+a_2\right)+a_3=18$，所以 $a_3=4$， ……………………………………………………………4 分

$\because \begin{cases}S_n+S_{n-1}=2n^2,n\ge 2\\ S_{n+1}+S_n=2\left(n+1\right)^2,n\ge 1\end{cases}$，两式相减可得 $a_{n+1}+a_n=4n+2,n\ge 2$，

$\therefore S_{102}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{101}+a_{102})=1+6+4(3+\cdots 101)+2\times 50=7+4\times\frac{3+101}{2}\times 50+100=10507$

……………………………………………………………………………………………………6 分

（2）由（1）得 $b_n=\begin{cases}7, n=1\\ 4n+2, n\ge 2\end{cases}$.

$T_n=b_1C_n^1+b_2C_n^2+\cdots+b_nC_n^n=7C_n^1+4\left(2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n\right)+2\left(C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n\right)$

$=7n+4n\left(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1}\right)+2\left(C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n-C_n^0-C_n^1\right)$

$=7n+4n\left(2^{n-1}-1\right)+2\left(2^n-1-n\right)=n+(n+1)\cdot 2^{n+1}-2$. ……………………………………………12 分

20.解：(1)（方法一）第一天训练的是“篮球运球上篮”，且第三天训练的是“篮球运球上篮”的概率是 $\frac{2}{3\times 2^2}=\frac{1}{6}$

第一天训练的不是“篮球运球上篮”，且第三天训练的是“篮球运球上篮”的概率是 $\frac{2}{3\times 2^2}=\frac{1}{6}$

所以第三天训练的是“篮球运球上篮”的概率是 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

（方法二）只考虑第三天所有可能的结果：3 个项目每个项目都有可能出现在第 4 天，且等可能，所以第三天训练的是“篮球运球上篮”的概率为 $\frac{1}{3}$ ……………………………………………………………………………4 分

（2）由题意知，X 所有可能的取值为 0,1,2,3 ……………………………………………………………5 分

$P(X=0)=\frac{2\times 1^5}{3\times 2^5}=\frac{2}{96}=\frac{1}{48}$，$P(X=1)=\frac{(2\times 1^4+1^2\times 1^3\times 2)\times 2}{3\times 2^5}=\frac{20}{96}=\frac{5}{24}$

$P(X=2)=\frac{2^3\times 1\times 3+2^2\times 1^2\times 6+2\times 1^3}{3\times 2^5}=\frac{50}{96}=\frac{25}{48}$，$P(X=3)=\frac{2^3\times 2+2^2\times 1\times 2}{3\times 2^5}=\frac{24}{96}=\frac{1}{4}$ …………9 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{48}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{1}{4}$

$E(X)=0\times\frac{1}{48}+1\times\frac{5}{24}+2\times\frac{25}{48}+3\times\frac{1}{4}=2$ ……………………………………………………………12 分

21.解：(1) 由题意可知双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 在点 $P(x_1,y_1)$ 处的切线方程为 $\frac{x_1x}{3}-y_1y=1$，$\because$ 切线过点 $C(m,1)$，

$\therefore \frac{x_1m}{3}-y_1\cdot 1=1$，同理可得 $\frac{x_2m}{3}-y_2\cdot 1=1$，则 $\frac{mx}{3}-y\cdot 1=1$ 即为经过 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ 两点的直线方程，故直线 PQ 的方程为 $mx-3y-3=0$ ……………………………………………………………………4 分

（2）$\because F$ 是线段 PQ 的中点，$\therefore$ 点 F 坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，同（1）理可得直线 DE 的方程为

$\frac{x}{3}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-y\cdot\frac{y_1+y_2}{2}=1$，$\because$ 直线 PQ：$\frac{mx}{3}-y=1$ 经过点 F $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，$\therefore \frac{m}{3}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{y_1+y_2}{2}=1$

∴点$C(m,1)$的坐标满足直线 DE 的方程，即直线 DE 过点 C. ……………………………………………8 分

∵点 P，Q 在双曲线上，∴$\frac{x_1^{\ 2}}{3}-y_1^{\ 2}=1$，$\frac{x_2^{\ 2}}{3}-y_2^{\ 2}=1$，两式相减得$\frac{x_1^{\ 2}}{3}-\frac{x_2^{\ 2}}{3}=y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}$，∴$\frac{x_1+x_2}{3(y_1+y_2)}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，

即直线 DE 的斜率等于直线 PQ 的斜率，∴$DE//PQ$，∴直线 DE 的方程为$y=\frac{m}{3}(x-m)+1$，

联立双曲线方程消 y 得$(3-m^2)x^2-2m(3-m^2)x-(3-m^2)^2-9=0$，设$D(x_3,y_3),E(x_4,y_4)$，则$x_3+x_4=2m$，

∴线段 DE 的中点坐标为$(m,1)$，即点 C 是线段 DE 的中点，故$S_1=S_2$ ……………………………………12 分

22．解：（1）设$A\left(m,f\left(m\right)\right)$，$C\left(n,f\left(n\right)\right)$，∵ $f\left(x\right)$单调递增，∴ $f\left(n\right)>f\left(m\right)$.

∴$k_{AC}=\frac{f(n)-f(m)}{n-m}>0$，同理可得$k_{BD}>0$，直线$AC$，$BD$的斜率均为正数，∴不可能互为相反数.

即不存在实数 m，n，使得$f(x)$，$g(x)$为“(m,n)相关函数”. ……………………………………………………………4 分

（2）1°当$a=0$时，$f\left(x\right)=1$，$g(x)=0$，则存在实数$mn>0$，使得$f(x)$，$g(x)$为“(m,n)相关函数”，且$|AB|=|CD|$；

………5 分

2°当$a\neq0$时，因为$f(x)$，$g(x)$为“(m,n)相关函数”，所以有$f(n)+g(n)=f(m)+g(m)$.

因为$|AB|=|CD|$，所以有$f(n)-g(n)=f(m)-g(m)$或$f(n)-g(n)=-f(m)+g(m)$.

② 联立$\begin{cases}f(n)+g(n)=f(m)+g(m)\\f(n)-g(n)=f(m)-g(m)\end{cases}$，可得$\begin{cases}f(m)=f(n)\\g(m)=g(n)\end{cases}$，所以$a=0$（舍）；

②联立$\begin{cases}f(n)+g(n)=f(m)+g(m)\\f(n)-g(n)=-f(m)+g(m)\end{cases}$，可得$\begin{cases}f(m)=g(n)\\g(m)=f(n)\end{cases}$，即$\begin{cases}e^{am}=an^2\\e^{an}=am^2\end{cases}$，易得$a>0$

当$n>m>0$时. $f\left(x\right)=e^{ax}$，$g(x)=ax^2$均为$[0,+\infty)$上的单调递增函数，由（1）知不存在实数 m，n，

使得$f(x)$，$g(x)$为“(m,n)相关函数”，所以$m<n<0$.

当$m<n<0$，则由$\begin{cases}e^{am}=an^2\\e^{an}=am^2\end{cases}$，可得$\begin{cases}n=-\frac{e^{\frac{am}{2}}}{\sqrt{a}}\\n=\frac{\ln a+2\ln\left(-m\right)}{a}\end{cases}$，可得$\ln a+2\ln\left(-m\right)=-\sqrt{a}e^{\frac{am}{2}}$，

∴$\ln a+2\ln\left(-m\right)+\sqrt{a}e^{\frac{am}{2}}=0$.同理可得$\ln a+2\ln\left(-n\right)+\sqrt{a}e^{\frac{an}{2}}=0$，

∴$\ln a+2\ln\left(-x\right)+\sqrt{a}e^{\frac{ax}{2}}=0$在$\left(-\infty,0\right)$上存在两个不同的实数根. ……………………………………………8 分

记$h\left(x\right)=\ln a+2\ln\left(-x\right)+\sqrt{a}e^{\frac{ax}{2}}\ (x<0)$，则$h'\left(x\right)=\frac{2}{x}+\frac{a\sqrt{a}e^{\frac{ax}{2}}}{2}=\frac{a\sqrt{a}xe^{\frac{ax}{2}}+4}{2x}$.

记$p\left(x\right)=a\sqrt{a}xe^{\frac{ax}{2}}+4$，则$p'\left(x\right)=a\sqrt{a}\left(\frac{ax}{2}+1\right)e^{\frac{ax}{2}}$.令$p'\left(x\right)=0$，可得$x=-\frac{2}{a}$.解$p'\left(x\right)>0$，可得$-\frac{2}{a}<x<0$，所以$p(x)$

在$\left(-\frac{2}{a},0\right)$上单调递增；解$p'(x)<0$，可得$x<-\frac{2}{a}$，所以$p(x)$在$\left(-\infty,-\frac{2}{a}\right)$上单调递减.

$\therefore$ $p(x)$在$x=-\frac{2}{a}$处取得极小值$p\left(-\frac{2}{a}\right)=a\sqrt{a}\left(-\frac{2}{a}\right)e^{\frac{a\left(-\frac{2}{a}\right)}{2}}+4=\frac{-2\sqrt{a}}{e}+4$.

（i）当$0<a\le 4e^2$时，$p(x)\ge p\left(-\frac{2}{a}\right)=-\frac{2\sqrt{a}}{e}+4\ge 0$，此时有$h'(x)\le 0$，即$h(x)$在$(-\infty,0)$单调递减.

又$h\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)>0$，$h\left(-\frac{e^{-e}}{\sqrt{a}}\right)=-2e+\sqrt{a}e^{\frac{a\left(-\frac{e^{-e}}{\sqrt{a}}\right)}{2}}<-2e+\sqrt{a}\le 0$，则根据零点存在定理可得，存在唯一$x_0\in\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},-\frac{e^{-e}}{\sqrt{a}}\right]$，

使得$h(x_0)=0$，即$\ln a+2\ln(-x)+\sqrt{a}e^{\frac{ax}{2}}=0$有唯一负根$x_0$，不满足题意；

（ii）当$a>4e^2$时，$p\left(-\frac{2}{a}\right)=-\frac{2\sqrt{a}}{e}+4<0$，$\because$ $p(0)>0$，且$-\frac{2\ln a}{a}<-\frac{2}{a}$，有$p\left(-\frac{2\ln a}{a}\right)=4-\frac{2\ln(a)}{\sqrt{a}}=4\left(1-\frac{\ln(\sqrt{a})}{\sqrt{a}}\right)>0$

根据零点存在定理可得，$\exists x_1\in\left(-\frac{2\ln a}{a},-\frac{2}{a}\right)$，使得$p(x_1)=0$；$\exists x_2\in\left(-\frac{2}{a},0\right)$，使得$p(x_2)=0$.

所以，当$x\in(-\infty,x_1)$时，有$p(x)>0$，此时$h'(x)<0$，$h(x)$在$(-\infty,x_1)$上单调递减；当$x\in(x_1,x_2)$时，有$p(x)<0$，此时$h'(x)>0$，$h(x)$在(x_1,x_2)上单调递增；当$x\in(x_2,0)$时，有$p(x)>0$，此时$h'(x)<0$，$h(x)$在$(x_2,0)$上单调递减.

$h\left(-\frac{2}{a}\right)=\ln a+2\ln\frac{2}{a}+\sqrt{a}e^{-1}=-\ln a+\frac{\sqrt{a}}{e}+\ln 4$，令$t(a)=-\ln a+\frac{\sqrt{a}}{e}+\ln 4$，（$a>4e^2$），

则$t'(a)=-\frac{1}{a}+\frac{1}{2e\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}-2e}{2ea}$，$\because$ $a>4e^2$，所以$\sqrt{a}>2e$，$\therefore$ $t'(a)>0$，$\therefore$ $t(a)$在$(4e^2,+\infty)$上单调递增，

$\therefore$ $t(a)>t(4e^2)=-\ln(4e^2)+\frac{\sqrt{4e^2}}{e}+\ln 4=0$，所以$h\left(-\frac{2}{a}\right)>0$，$\therefore$ $h(x_2)>h\left(-\frac{2}{a}\right)>0$，根据零点存在定理可知，

$\exists n\in(x_2,0)$，使得$h(n)=0$.$\because a>4e^2,n>x_2>-\frac{2}{a}$，$\therefore \sqrt{a}n+e^{\frac{an}{2}}>\sqrt{a}(-\frac{2}{a})+e^{\frac{a}{2}(-\frac{2}{a})}=-\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{1}{e}>-\frac{2}{2e}+\frac{1}{e}=0$，

$\therefore -\frac{e^{\frac{an}{2}}}{\sqrt{a}}<n$，取$m=-\frac{e^{\frac{an}{2}}}{\sqrt{a}}<n$，$\because h(n)=\ln a+2\ln(-n)+\sqrt{a}e^{\frac{an}{2}}=0$，$\therefore -\sqrt{a}e^{\frac{an}{2}}=\ln\left[a(-n)^2\right]$，

$\therefore h(m)=\ln a+2\ln\frac{e^{\frac{an}{2}}}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}e^{\frac{a}{2}(-\frac{e^{\frac{an}{2}}}{\sqrt{a}})}=\ln a+an-\ln a+\sqrt{a}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{a}e^{\frac{an}{2}}}=an+\sqrt{a}e^{\frac{1}{2}\ln(a(-n)^2)}=an+\sqrt{a}\sqrt{a}(-n)=0$

即有$h(m)=h(n)=0$，符合题意.综上所述，a的取值范围是$(4e^2,+\infty)\cup\{0\}$. ……………………………………12 分