高三阶段性考试
数学参考答案(理科)

1. A　$A\cap B=\{x|-1<x<0\}$.

2. B　若“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分不必要条件，则 $A\subsetneqq B$，故选 B.

3. C　由题意可知 $3+\frac{p}{2}=8$，所以 $p=10$.

4. D　因为 $a>\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$，$b=2^{-1.2}<2^{-1}=\frac{1}{2}$，所以 $a>b$.

因为 $a=\log_5 3<\log_5 5=1$，$c=0.3^{-0.2}>0.3^0=1$，所以 $a<c$，故 $c>a>b$.

5. D　因为 $f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$，且最小正周期为 π，所以 $\omega=2$，即 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

由题意可知 $g(x)=2\sin[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$. 因为 $g(\frac{\pi}{6})=0$，所以 $g(x)$ 的图像关于点 $(\frac{\pi}{6},0)$ 对称.

6. B　设 BC 边的中点为 E，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$，则 $\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}|\overrightarrow{BC}|^2\cdot\overrightarrow{AE}$，

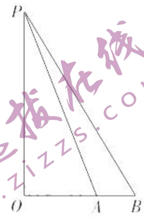
故 $\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BC}|^3}=\frac{\sqrt{3}|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{3}{2}$.

7. C　因为 $a+4b=6$，所以 $(a-1)+4(b-1)=1$.

因为 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}=(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1})[(a-1)+4(b-1)]=5+\frac{4(b-1)}{a-1}+\frac{a-1}{b-1}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4(b-1)}{a-1}\cdot\frac{a-1}{b-1}}=9$，当且仅当 $\frac{4(b-1)}{a-1}=\frac{a-1}{b-1}$，即 $a=\frac{4}{3}$，$b=\frac{7}{6}$ 时，等号成立.

8. D　由题意知 $c^2=m+1-m=1$，所以 $c=1$. 又因为 $\frac{1}{\sqrt{m+1}}=\frac{1}{2}$，所以 $m=3$，解得 $a=2$，$c=1$. 因为 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，所以 C 的短轴长为 $2\sqrt{3}$.

9. C　如图，设 $PO=h$ 米，则 $\frac{h}{OA}=\tan 60^\circ$，$\frac{h}{OB}=\tan 50^\circ$，



所以 $AB=OB-OA=h(\frac{1}{\tan 50^\circ}-\frac{1}{\tan 60^\circ})$，

则 $h=\frac{AB\tan 50^\circ\tan 60^\circ}{\tan 60^\circ-\tan 50^\circ}=\frac{286\times\sqrt{3}\times 1.2}{\sqrt{3}-1.2}=\frac{594.4}{0.532}\approx 1117$，

故雾灵山主峰的海拔约为 $1117+1000=2117$ 米.

10. C　因为 $f(x)$ 为偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增.

由 $f(x-1)>f(x)$，得 $|x-1|<|x|$，解得 $x>\frac{1}{2}$，即不等式 $f(x-1)>f(x)$ 的解集为 $(\frac{1}{2},+\infty)$.

11. A　由 $f(x)=0$，得 $m=x^2-2\ln x$，令 $g(x)=x^2-2\ln x$，

则 $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$，所以 $g(x)$ 在 $[\frac{1}{e},1]$ 上单调递减，在 $[1,e^2]$ 上单调递增.

因为 $g(x)_{\min}=g(1)=1$，$g(\frac{1}{e})=\frac{1}{e^2}+2<g(e^2)=e^4-4$，所以 m 的取值范围为 $(1,\frac{1}{e^2}+2]$.

12. A　设 $A(x_0,y_0)$，$N(x_1,y_1)$，则 $B(-x_0,-y_0)$，$M(x_0,-y_0)$.

因为 $k_{AN}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，$k_{BN}=\frac{y_1+y_0}{x_1+x_0}$，由 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，所以 $k_{BN}\cdot k_{AN}=\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$.

因为 $k_{AB}\cdot k_{AN}=-3$，所以 $\frac{k_{BN}}{k_{AB}}=-\frac{e^2-1}{3}$. 因为 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}$，所以点 P 的坐标为 $(x_0,-2y_0)$.

因为 $k_{BN}=k_{BP}=-\frac{y_0}{2x_0}=-\frac{1}{2}k_{AB}$，所以 $\frac{k_{NB}}{k_{AB}}=-\frac{e^2-1}{3}=-\frac{1}{2}$，解得 $e=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

13. -4　作出可行域(图略)可知，当直线 $x+4y-z=0$ 经过点 $(4,-2)$ 时，z 最小，且最小值为 -4.

14. $4\sqrt{2}$　因为圆 C 的圆心为 $(2,-3)$，半径为 4，所以圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|2-(-3)-1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，故直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=4\sqrt{2}$.

15. 820;3　因为 $\{a_n\}$ 为正项等比数列，所以 S_2，S_4-S_2，S_6-S_4，…也成等比数列.

因为 $S_2=1$，$S_6=91$，所以 $(S_4-1)^2=1\times(91-S_4)$，得 $S_4^2-S_4-90=(S_4-10)(S_4+9)=0$. 因为 $a_n>0$，所以

所以当 A，N，Q 三点共线时，$|QA|-|QN|$ 的值最大.

因为 $|AN|=\sqrt{(-\frac{9}{17})^2+(1-\frac{19}{17})^2}=\frac{\sqrt{85}}{17}$，

所以 $|QA|-|QC|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{85}}{17}$. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $|PF_1|-|PF_2|+|F_1F_2|=2-2\sqrt{2}$，$|F_1F_2|=2$，………………………… 2 分

所以 $|PF_1|+|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$，………………………………………………………… 3 分

所以 $b^2=a^2-c^2=2-1=1$，………………………………………………………………… 4 分

故椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………………………………… 5 分

(2)由题意可知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $\Delta=16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-2)=16k^2-8m^2+8>0$，

且 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$. ………………………………………… 6 分

因为 $k_{F_2A}+k_{F_2B}=0$，所以 $\frac{y_1}{x_1-1}+\frac{y_2}{x_2-1}=0$，……………………………… 8 分

所以 $(kx_1+m)(x_2-1)+(kx_2+m)(x_1-1)=2kx_1x_2+(m-k)(x_1+x_2)-2m=0$，

所以 $2k\cdot\frac{2m^2-2}{1+2k^2}+(k-m)\cdot\frac{4km}{1+2k^2}-2m=0$，化简得 $m=-2k$，……………… 10 分

所以直线 l 的方程为 $y=kx-2k=k(x-2)$，

故直线 l 过定点 $(2,0)$. ……………………………………………………………… 12 分

22. (1)解：因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. …………… 1 分

因为 $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}+a$，所以 $-\frac{\ln x}{x^2}+a\geqslant 0$，即 $a\geqslant\frac{\ln x}{x^2}$. …………………………… 2 分

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$. 由 $g'(x)=0$，得 $x=\sqrt{e}$. ……………………… 3 分

因为 $g(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{max}=g(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$，故 $a\geqslant\frac{1}{2e}$，即 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2e},+\infty)$. ……………… 5 分

(2)证明：因为 $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}+a$，所以 $f'(x)=0$ 的根即直线 $y=a$ 与 $y=\frac{\ln x}{x^2}$ 图像的交点的横坐标.

由(1)知 $y=\frac{\ln x}{x^2}$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减. ……………………… 6 分

设 $x_1<x_2$，因为 $f'(x)=0$ 有两个根，且当 $x>1$ 时，$\frac{\ln x}{x^2}>0$，

所以 $x_1\in(1,\sqrt{e})$，$x_2\in(\sqrt{e},+\infty)$. …………………………………………………… 7 分

令 $F(x)=f'(x)-f'(\frac{e}{x})=\frac{\ln\frac{e}{x}}{(\frac{e}{x})^2}-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{x^2-x^2\ln x}{e^2}-\frac{\ln x}{x^2}$，$x\in(1,\sqrt{e})$，…………………… 8 分

则 $F'(x)=\frac{x(1-2\ln x)}{e^2}-\frac{1-2\ln x}{x^3}=(1-2\ln x)(\frac{x}{e^2}-\frac{1}{x^3})$.

因为 $x\in(1,\sqrt{e})$，所以 $1-2\ln x>0$.

设 $h(x)=\frac{x}{e^2}-\frac{1}{x^3}$，$x\in(1,\sqrt{e})$，

因为 $h(x)$ 在 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递增，所以 $h(x)<h(\sqrt{e})=0$，

所以 $F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 在 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递减. ……………………………………………… 9 分

因为 $F(x)>F(\sqrt{e})=0$，所以 $f'(x)>f'(\frac{e}{x})$. …………………………………………… 10 分

因为 $x_1\in(1,\sqrt{e})$，所以 $f'(x_1)>f'(\frac{e}{x_1})$.

因为 $f'(x_1)=f'(x_2)$，所以 $f'(x_2)>f'(\frac{e}{x_1})$. …………………………………………… 11 分

因为 x_2，$\frac{e}{x_1}\in(\sqrt{e},+\infty)$，且 $f'(x)$ 在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x_2>\frac{e}{x_1}$，即 $x_1x_2>e$. ………………………………………………………… 12 分

因为 $q^2=\frac{S_4-S_2}{S_2}=9$，且 $a_n>0$，所以 $q=3$.

16. $2x-y-7=0$　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}x_1^2=8y_1,\\x_2^2=8y_2,\end{cases}$ 两式相减得 $x_1^2-x_2^2=8(y_1-y_2)$，所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{8}$. 因为线段 AB 的中点坐标为(8,9)，所以直线 l 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{8}=2$，故直线 l 的方程为 $y-9=2(x-8)$，即 $2x-y-7=0$.

17. 解：(1)当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$. …………………… 1分

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-[\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{5}{2}(n-1)]=3n+1$. …………………… 3分

因为当 $n=1$ 时，$3\times1+1=4$，所以 $a_n=3n+1$. …………………… 5分

(2)因为 $\frac{3}{a_na_{n+1}}=\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}$，…………………… 8分

所以 $T_n=(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{10})+\cdots+(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4})$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}=\frac{3n}{12n+16}$. …………………… 10分

18. 解：(1)因为 $3b\cos C=5a\sin A-3c\cos B$，

所以 $3\sin B\cos C+3\sin C\cos B=3\sin(B+C)=5\sin^2A$，…………………… 3分

即 $3\sin A=5\sin^2A$. …………………… 4分

因为 $\sin A\neq0$，所以 $\sin A=\frac{3}{5}$. …………………… 6分

(2)因为 $a<b$，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{4}{5}$. …………………… 7分

因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$a=3$，$b=5$，

所以 $9=25+c^2-2\times5c\times\frac{4}{5}$，所以 $c^2-8c+16=0$. …………………… 9分

解得 $c=4$. …………………… 10分

故△ABC 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times5\times4\times\frac{3}{5}=6$. …………………… 12分

19. 解：(1)设双曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则 $\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\c=\sqrt{5},\end{cases}$ …………………… 2分

结合 $c^2=a^2+b^2$，得 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\b=\sqrt{3},\end{cases}$ …………………… 4分

故双曲线 C 的标准方程为 $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{3}=1$. …………………… 5分

(2)由题意可知，直线 l 的斜率存在，设直线 $l:y=kx+4$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立方程组 $\begin{cases}y=kx+4,\\\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $(3k^2-2)x^2+24kx+42=0$，

则 $x_1+x_2=-\frac{24k}{3k^2-2}$，$x_1x_2=\frac{42}{3k^2-2}$. …………………… 7分

所以 $y_1y_2=(kx_1+4)(kx_2+4)=k^2x_1x_2+4k(x_1+x_2)+16=\frac{42k^2}{3k^2-2}-\frac{96k^2}{3k^2-2}+16=\frac{-6k^2-32}{3k^2-2}$.

因为原点 O 在以 AB 为直径的圆上，所以 $OA\perp OB$，

即 $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{42}{3k^2-2}+\frac{-6k^2-32}{3k^2-2}=0$.

解得 $k^2=\frac{5}{3}$. …………………… 10分

故直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}x+4$. …………………… 12分

20. 解：(1)若直线 l 的斜率不存在，则 l 的方程为 $x=1$，

此时直线 l 与圆 C 相切，符合题意. …………………… 2分

若直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y+2=k(x-1)$，即 $kx-y-k-2=0$.

因为直线 l 与圆 C 相切，所以圆心 $(-1,1)$ 到 l 的距离为2，

即 $\frac{|2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=-\frac{5}{12}$. …………………… 4分

所以直线 l 的方程为 $y+2=-\frac{5}{12}(x-1)$，即 $5x+12y+19=0$.

综上，直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $5x+12y+19=0$. …………………… 6分