上学期期中考试文科数学答案

ACCDC　DCC DD　CA

13. 1

14. $[0,e]\cup\{\frac{e^2}{2}\}$

15. 16

16. 1

由数列$\{a_n\}$的构造方法可知$a_1=1$，$a_3=2$，$a_7=3$，$a_{15}=4$，

可得：$a_{2^n-1}=n$

即：$a_{2^n-1+k}=a_k\left(1\le k<2^n-1\right)$

$\therefore a_{2019}=a_{996}=a_{485}=a_{230}=a_{103}=a_{40}=a_9=a_2=1$

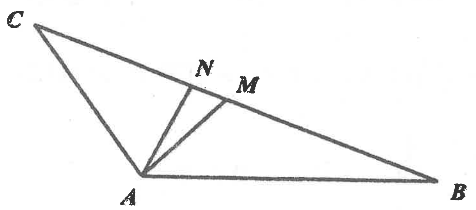
17、(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$　$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A=bc\cos A=-1$

又$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$bc\sin A=\sqrt{3}$

$\therefore\frac{bc\sin A}{bc\cos A}=\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A=-\sqrt{3}$

又$A\in(0,\pi)$　$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$

（2）如下图所示：



在ΔABC中，AM为中线　$\therefore 2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\therefore 4\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=c^2+b^2$

$\therefore b^2+c^2=5$

由（1）知：$bc\sin A=\sqrt{3}$　$\Rightarrow bc=2$

又$c>b$　$\therefore c=2$，$b=1$

由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=5+2=7$

$\Rightarrow a=\sqrt{7}$

$S_{\Delta ANC}=\frac{1}{2}|AN|\cdot b\sin\angle CAN=\frac{1}{2}|AN|\sin\angle CAN$

$S_{\Delta BAN}=\frac{1}{2}|AN|\cdot c\sin\angle BAN=|AN|\sin\angle BAN$

又$\angle CAN=\angle BAN$

$\therefore\frac{S_{\Delta ANC}}{S_{\Delta BAN}}=\frac{|CN|}{|BN|}=\frac{1}{2}$，又$|CN|+|BN|=a=\sqrt{7}$

$\therefore|CN|=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\therefore|MN|=|CM|-|CN|=\frac{1}{2}a-|CN|=\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{\sqrt{7}}{6}$

【点睛】

18、【答案】(1) $b_n=2^{n-1}$；(2) 5或75.

【解析】

【分析】

(1)设等差数列$\{a_n\}$公差为d,等比数列$\{b_n\}$公比为$q(q\ne0)$,由已知条件求出q，再写出通项公式;（2）由$T_{13}=13$，求出q的值，再求出d的值，求出S_5.

【详解】

设等差数列$\{a_n\}$公差为d，等比数列$\{b_n\}$公比为$q(q\ne0)$有$(1+d)+q=4$，即$d+q=3$.

(1) $\because(1+2d)+q^2=7$，结合$d+q=3$得$q=2$，

$\therefore b_n=2^{n-1}$.

（2）$\because T_3=1+q+q^2=13$，解得$q=-4$或3，

当$q=-4$时，$d=7$，此时$S_5=5+\frac{5\times4}{2}\times7=75$;

当$q=3$时，$d=0$，此时$S_5=5a_1=5$.

19、【答案】(1) $y^2=4x$.（2）见证明

【解析】

【分析】

(1) $|AF|=2+\frac{p}{2}$即$2+\frac{p}{2}=3$，解得$p=2$，所以抛物线E的方程为$y^2=4x$.

(2) 由抛物线的对称性，不妨设$A(2,2\sqrt{2})$．联立方程得到$B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$，计算以$k_{GA}+k_{GB}=0$，从而$\angle AGF=\angle BGF$，得到结论.

【详解】

(1)解：由抛物线的定义知$|AF|=2+\frac{p}{2}$.

因为$|AF|=3$，即$2+\frac{p}{2}=3$，解得$p=2$，

所以抛物线E的方程为$y^2=4x$.

(2)证明：证法一：因为点$A(2,m)$在抛物线E：$y^2=4x$上，

所以$m=\pm2\sqrt{2}$.

由抛物线的对称性，不妨设$A(2,2\sqrt{2})$.

由$A(2,2\sqrt{2})$，$F(1,0)$可得直线AF的方程为$y=2\sqrt{2}(x-1)$.

由$\begin{cases}y=2\sqrt{2}(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$得$2x^2-5x+2=0$，解得$x=2$或$x=\frac{1}{2}$，从

而$B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$.

又 G(−1，0)，所以

$$k_{GA}=\frac{2\sqrt{2}-0}{2-(-1)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}，k_{GB}=\frac{-\sqrt{2}-0}{\frac{1}{2}-(-1)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}，$$

所以 $k_{GA}+k_{GB}=0$，从而∠AGF=∠BGF，

这表明点 F 到直线 GA，GB 的距离相等，

故以 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆必与直线 GB 相切.

证法二：设以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆的半径为 r.

因为点 A(2，m)在抛物线 E：$y^2=4x$ 上，所以 $m=\pm 2\sqrt{2}$.

由抛物线的对称性，不妨设 $A(2,\ 2\sqrt{2})$.

由 $A(2,\ 2\sqrt{2})$，F(1，0)可得，直线 AF 的方程为 $y=2\sqrt{2}(x-1)$.

由 $\begin{cases}y=2\sqrt{2}(x-1)\\ y^2=4x\end{cases}$ 得 $2x^2-5x+2=0$，解得 x=2 或 $x=\frac{1}{2}$，从

而 $B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$.

又 G(−1，0)，故直线 GA 的方程为 $2\sqrt{2}x-3y+2\sqrt{2}=0$，

从而 $r=\frac{|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}|}{\sqrt{8+9}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$.

又直线 GB 的方程为 $2\sqrt{2}x+3y+2\sqrt{2}=0$，

所以点 F 到直线 GB 的距离 $d=\frac{|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}|}{\sqrt{8+9}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}=r$.

这表明以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆必与直线 GB 相切.

【点睛】

本题考查了抛物线方程，证明直线与圆相切，计算 $k_{GA}+k_{GB}=0$，从而∠AGF=∠BGF 是解题的关键.

20、【答案】(1) $a_n=3n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$ (2) $-18n^2-6n$

【解析】

【分析】

(1) 根据 a_n 与 S_n 的关系，利用临差法得到 $a_n-a_{n-1}=3$，知公差为 3；再由 $n=1$ 代入递推关系求 a_1；

(2) 观察数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，相邻两项的和有规律，故采用并项求和法，求其前 $2n$ 项和.

【详解】

(1) ∵对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $S_n=\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$，①

∴当 $a=1$ 时，有 $S_1=a_1=\frac{1}{6}(a_1+1)(a_1+2)$，解得 $a_1=1$ 或 2.

当 $n\ge 2$ 时，有 $S_{n-1}=\frac{1}{6}(a_{n-1}+1)(a_{n-1}+2)$.②

①-②并整理得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-3)=0$.

而数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，∴ $a_n-a_{n-1}=3$.

当 $a_1=1$ 时，$a_n=1+3(n-1)=3n-2$，

此时 $a_4^2=a_2a_9$ 成立；

当 $a_1=2$ 时，$a_n=2+3(n-1)=3n-1$，此时 $a_4^2=a_2a_9$，不成立，舍去.

∴ $a_n=3n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)

$T_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}=$

$a_1a_2-a_2a_3+a_3a_4-a_4a_5+\cdots-a_{2n}a_{2n+1}$

$=a_2(a_1-a_3)+a_4(a_3-a_5)+\cdots+a_{2n}(a_{2n-1}-a_{2n+1})$

$=-6a_2-6a_4-\cdots-6a_{2n}$

$=-6(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$

$=-6\times\frac{n(4+6n-2)}{2}=-18n^2-6n$.

21、【答案】(Ⅰ) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.(Ⅱ) 见证明

【解析】

【分析】

(Ⅰ) 求得函数的导数 $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$，且 $f'(1)=0$，进而利用导数的符号，即可求得函数单调区间；

(Ⅱ) 由 $h(x)=m(x-1)\ln x+x-\ln x-\frac{3}{e}$ 有两个零点，利用导数求得函数 $h(x)$ 的单调性与最值，结合图象，即可得出证明.

【详解】

(Ⅰ) 由题意，函数 $f(x)=(x-1)\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$，

且 $f'(1)=0$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x\ge 1$ 时，$f'(x)\ge 0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

(Ⅱ) 由 $h(x)=m(x-1)\ln x+x-\ln x-\frac{3}{e}$ 有两个零点可知

由 $h'(x)=m(1+\ln x-\frac{1}{x})+1-\frac{1}{x}$ 且 $m>0$ 可知，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减；

当 $x\ge 1$ 时，$h'(x)\ge 0$，函数 $h(x)$ 单调增；

即 $h(x)$ 的最小值为 $h(1)=1-\frac{3}{e}<0$，

因此当 $x=\frac{1}{e}$ 时，

$h(\frac{1}{e})=m(\frac{1}{e}-1)(-1)+\frac{1}{e}-(-1)-\frac{3}{e}=\frac{m(e-1)+e-2}{e}>0$，

可知 $h(x)$ 在 $(\frac{1}{e},1)$ 上存在一个零点；

当 $x=e$ 时，$h(e)=m(e-1)+e-1-\frac{3}{e}>0$，

可知 $h(x)$ 在 $(1,e)$ 上也存在一个零点，

因此 $x_2-x_1<e-\frac{1}{e}$，即 $x_1+e>x_2+\frac{1}{e}$。

【详解】

（1）由已知可得，

$$\begin{cases}2c=4\\ \frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$$

解得 $a^2=8$，$b^2=4$，$c=2$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$．

（2）由已知可得，$B(0,2)$，$F(2,0)$，$\therefore k_{BF}=-1$．$\because$ $BF\perp l$，

$\therefore$ 可设直线 l 的方程为 $y=x+m$，代入椭圆方程整理，

得 $3x^2+4mx+2m^2-8=0$．设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{4m}{3}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-8}{3}$，$\because$

$BN\perp MF$，$\therefore \frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-2}{x_2}=-1$。

即 $y_1y_2+x_1x_2-2y_1-2x_2=0$

$\because$

$y_1=x_1+m, y_2=x_2+m$，$\therefore (x_1+m)(x_2+m)+x_1x_2-2(x_1+m)$

即 $2x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)+m^2-2m=0$，$\because$

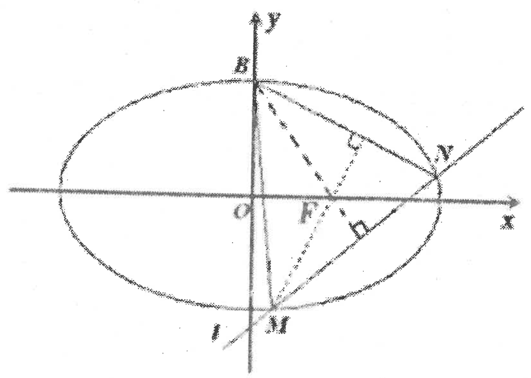
$2\cdot\frac{2m^2-8}{3}+(m-2)\cdot\frac{-4m}{3}+m^2-2m=0$

$\therefore 3m^2+2m-16=0$，$\therefore m=-\frac{8}{3}$ 或 $m=2$．

由 $\Delta=(4m)^2-12(2m^2-8)=96-8m^2>0$，得 $m^2<12$

又 $m=2$ 时，直线 l 过 B 点，不合要求，$\therefore m=-\frac{8}{3}$，

故存在直线 $l: y=x-\frac{8}{3}$ 满足题设条件.



【点睛】

本题主要考查椭圆方程的求法，直线与椭圆的位置关系应用，以及垂心的定义应用。意在考查学生的数学运算能力。