德阳市高中2020级第一次诊断考试

数学参考答案与评分标准

（理科）

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	B	C	D	D	C	B	A	B	B	D

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. 12　　14. $\frac{1}{2}$　　15. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　　16. $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3},1\right)$.

三、解答题

17. 解：(1) 由题意知：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{dn^2+(2-d)n}{2}$.

所以 $S_{2n}=\frac{4dn^2+2(2-d)n}{2}$

所以$\frac{S_n}{S_{2n}}=\frac{dn^2+(2-d)n}{4dn^2+2(2-d)n}=\frac{dn+2-d}{4dn+4-2d}$为常数.

因为 $d\neq 0$，故只要$\frac{d}{4d}=\frac{2-d}{4-2d}$，解得 $d=2$

此时 $a_n=2n-1$. ………………………………………………………… 6分

(2) 由(1)知 $a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}\cdot a_n=(2n-1)2^{n-1}$.

所以 $T_n=1\times 2^0+3\times 2^1+\cdots+(2n-1)\times 2^{n-1}$

得 $2T_n=1\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+(2n-3)\times 2^{n-1}+(2n-1)\times 2^n$

两式相减得：$-T_n=1\times 2^0+2\times 2^1+\cdots+2\times 2^{n-1}-(2n-1)\times 2^n$

$$=1+2\times\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\times 2^n$$

$$=(3-2n)\times 2^n-3$$

所以 $T_n=(2n-3)\times 2^n+3$. ………………………………………… 12分

③ 直线 AB 与 CD 成 60° 角

④ 直线 AB 与 CD 垂直

A. ①③　　　　B. ①④　　　　C. ②③　　　　D. ②④

8. 已知某曲线方程为 $\frac{x^2}{m+3}-\frac{y^2}{2m-1}=1$，则下列描述中不正确的是

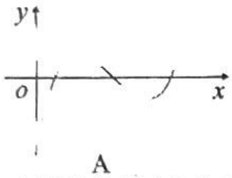
A. 若该曲线为双曲线，且焦点在 x 轴上，则 $m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

B. 若该曲线为圆，则 $m=4$

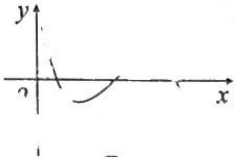
C. 若该曲线为椭圆，则其焦点可以在 x 轴上，也可以在 y 轴上

D. 若该曲线为双曲线，且焦点在 y 轴上，则 $m\in(-\infty,-3)$

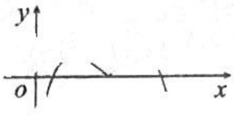
9. 函数 $f(x)=[\ln(\pi-x)+\ln x]\cos x$ 的大致图象为



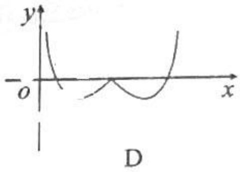
A



B

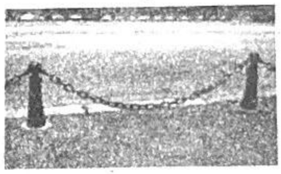


C



D

10. 如图是旌湖边上常见的设施，从两个高为 1 米的悬柱上放置一根均匀铁链，让其自然下垂轻触地面（视为相切）形成的曲线称为悬链线（又称最速降线）. 建立恰当的直角坐标系后，其方程可以是 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}+t)$，那么两悬柱间的距离大致为（可能会用到的数据 $e^{1.25}\approx3.49, e^{1.35}\approx3.86$）



A. 2.5 米　　　　B. 2.6 米　　　　C. 2.8 米　　　　D. 2.9 米

11. 已知函数 $f(x)=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{x^{2023}}{2023}, x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的零点个数为

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 2023

12. 已知 a、b、c 是正实数，且 $e^{2a}-2e^{a+b}+e^{b+c}=0$，则 a、b、c 的大小关系不可能为

A. $a=b=c$　　　　B. $a>b>c$　　　　C. $b>c>a$　　　　D. $b>a>c$

第 Ⅱ 卷（非选择题　共 90 分）

本卷包括必考题和选考题两部分，第 13 ~ 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

二、填空题：共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 将答案填在答题卡上.

13. 已知二项式 $\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ $(n\in N^*)$ 的展开式中最后三项的二项式系数和为 79，则 $n=$ ______.

19. 解：(1) 由题得：$\bar{x}=8,\bar{y}=6.5$

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{8}x_iy_i-8\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{8}x_i^2-8\bar{x}^2}=\dfrac{459.5-8\times8\times6.5}{580-8\times64}=0.64$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=6.5-0.64\times8=1.38$.

故月利润 y(千元) 关于月销售量 x(百个) 的回归方程为：$\hat{y}=0.64x+1.38$.

……………………………………………………………………………… 6 分

(2) ξ 的所有可能取值为 0、1、2、3，则

$P(\xi=0)=\dfrac{C_4^3}{C_8^3}=\dfrac{4}{56}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_4^2\times C_4^1}{C_8^3}=\dfrac{24}{56}$ ……………………… 8 分

$P(\xi=2)=\dfrac{C_4^1\times C_4^2}{C_8^3}=\dfrac{24}{56}$，$P(\xi=3)=\dfrac{C_4^3}{C_8^3}=\dfrac{4}{56}$ ……………………… 10 分

故 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

ξ 的数学期望 $E\xi=0\times\dfrac{4}{56}+1\times\dfrac{24}{56}+2\times\dfrac{24}{56}+3\times\dfrac{4}{56}=\dfrac{3}{2}$. ………… 12 分

20. 解：(1) 因为 $f'(x)=x^2+(a-1)x-a=(x+a)(x-1)$

令 $f'(x)=0$ 解得：$x=1$ 或 $x=-a$ ………………………………………… 1 分

因为 $a>0$，可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上单增，$(-a,1)$ 上单减，$(1,+\infty)$ 上单增. ……………………………………………………………………… 2 分

所以 $f(x)_{极大值}=f(-a)=\dfrac{1}{6}a^3+\dfrac{1}{2}a^2$ ………………………………… 3 分

$f(x)_{极小值}=f(1)=-\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{6}$. ………………………………………… 4 分

(2) 由(1) 知 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上单增，$(-a,1)$ 上单减，$(1,+\infty)$ 上单增.

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单减，在 $[1,2]$ 上单增.

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 的最小值 $m=f(1)=-\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{6}$. …………… 5 分

最大值 M 为 $f(-1)=\frac{3a}{2}-\frac{5}{6}$ 与 $f(2)=\frac{2}{3}$ 的较大者.

因为 $f(-1)-f(2)=\frac{3a}{2}-\frac{3}{2}>0$,所以 $M=\frac{3a}{2}-\frac{5}{6}$. ……………… 7 分

因为 $M+m\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,即 $M+m=f(-1)+f(1)=a-1\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

所以 $a\in\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$. ……………………………………………………………… 8 分

$f(x)$ 的三个零点 x_1,x_2,x_3 为方程 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(a-1)x^2-ax=0$ 的三个根,显然一根为 0,不妨设 $x_3=0$,那么 x_1,x_2 为方程 $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}(a-1)x-a=0$ 的两根,所以 $x_1x_2=-3a$. ……………………………………………………… 9 分

故 $f(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=f(-3a)=-\frac{9a^3+3a^2}{2}\left[a\in\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)\right]$. …
…………………………………………………………………………… 10 分

令 $g(a)=-\frac{9a^3+3a^2}{2}\left[a\in\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)\right]$

有 $g'(a)=-\frac{27a^2+6a}{2}<0\left[a\in\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)\right]$

即 $g(a)=-\frac{9a^3+3a^2}{2}$ 在 $\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$ 上单减 ………………………………… 11 分

所以 $g(a)$ 的值域为 $\left(g\left(\frac{5}{3}\right),g\left(\frac{4}{3}\right)\right)=\left(-25,-\frac{40}{3}\right)$.

即 $f(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$ 的取值范围为 $\left(-25,-\frac{40}{3}\right)$. …………… 12 分

21.解:(1) 由题可知:$h'(x)=e^x-t\cos x\geqslant 0$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立

显然 $\cos x>0$,故只要 $t\leqslant\frac{e^x}{\cos x}$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立.

令 $F(x)=\frac{e^x}{\cos x},x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

因为 $F'(x)=\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x},x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

令 $F'(x)=\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}>0$，解得 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

故 $F(x)$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单增，在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单减.

所以 $F(x)_{\min}=F\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，

即实数 t 的取值范围为 $(-\infty,\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}]$. …………………………………… 4 分

(2) 由题意，只要找出 $t\in(0,+\infty)$，使得 $x>0$ 时，$h(x)>0$；$x<0$ 时，$h(x)<0$；$x=0$ 时，显然成立.

现证 $t=\dfrac{1}{2}\in(0,+\infty)$，满足题意.

只要证当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，若 $x>0$ 时，$h(x)>0$ 成立且若 $x<0$ 时，$h(x)<0$ 也成立. ………………………………………………………………………… 6 分

当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，若 $x>0$，$h(x)=e^x-\dfrac{1}{2}\sin x-1$，所以 $h'(x)=e^x-\dfrac{1}{2}\cos x$

因为 $x>0$，故 $e^x>1>\dfrac{1}{2}\cos x$，即 $h'(x)=e^x-\dfrac{1}{2}\cos x>0$ 恒成立.

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，故 $h(x)>f(0)=0$. 即 $x>0$ 时，$h(x)>0$ 成立. ………………………………………………………………………… 8 分

当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，若 $x<0$，$h(x)=e^x-\dfrac{1}{2}\sin x-1$

由(1)知当 $t\in(-\infty,\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}]$ 时，$e^x-t\sin x-1$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增.

因为 $e^{\pi}<64\Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{4}}<2\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

所以 $h(x)=e^x-\dfrac{1}{2}\sin x-1$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增

故当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 时，$h(x)<h(0)=0$. ……………………………… 10 分

当 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$e^x\leqslant e^{-\frac{\pi}{2}}$，$\dfrac{1}{2}\sin x+1\geqslant\dfrac{1}{2}$

因为 $e^{\pi}>4\Leftrightarrow\frac{1}{2}>e^{-\frac{\pi}{2}}$

所以 $e^{x}\leqslant e^{-\frac{\pi}{2}}<\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}\sin x+1$ 即当 $x\in\left(-\infty,-\frac{\pi}{2}\right]$ 时，也有 $h(x)<0$.

……………………………………………………………………………… 11 分

综上，$\exists t\in(0,+\infty)$，对 $\forall x\in R$，$\exists a\in[0,+\infty)$，使得 $xh(x)=a$ 总成立.

……………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+3=0$. …………… 2 分

设直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$，直线 l 与曲线 C_1 的交点极坐标分别为 $A(\rho_A,\alpha)$，$B(\rho_B,\alpha)$，则 $|OA|\cdot|OB|=|\rho_A|\cdot|\rho_B|$.

因为 ρ_A、ρ_B 是方程 $\rho^2-2\rho\cos\alpha-2\sqrt{3}\rho\sin\alpha+3=0$ 的两根，故 $\rho_A\cdot\rho_B=3$.

所以 $|OA|\cdot|OB|$ 为常数 3. ………………………………………………… 5 分

(2) 若直线 l 平分曲线 C_1，则直线 l 的直角坐标方程为 $y=\sqrt{3}x$，易知 $|AB|=2$.

……………………………………………………………………………… 6 分

直线 OP 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 代入曲线 C_2 的参数方程 $\begin{cases}x=3t^2\\y=\sqrt{3}t\end{cases}$

得 $\sqrt{3}t=-\sqrt{3}t^2$

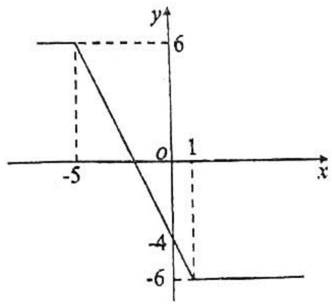
所以点 P 的坐标为 $(3,-\sqrt{3})$，故 $|OP|=2\sqrt{3}$，所以 $\triangle PAB$ 的面积为 $2\sqrt{3}$.

……………………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1) 因为 $y=f(x-1)-f(x+5)$

$$=|x-1|-|x+5|$$

$$=\begin{cases}6, x\leqslant-5\\-2x-4, -5<x\leqslant1.\\-6, x>1\end{cases}$$



故 $y=f(x-1)-f(x+5)$ 的图象为

……………………………………………… 5 分

根据图象得原不等式的解集为 $[0,+\infty)$.

(2) $f(x-1)-f(x+5)+kf(x+2)\geqslant0\Leftrightarrow|x-1|-|x+5|+k|x+2|\geqslant0$ 恒成立.

当 $x=-2$ 时，不等式显然成立.

当 $x\neq-2$ 时，原不等式 $\Leftrightarrow k\geqslant\frac{|x+5|-|x-1|}{|x+2|}$

$$=\left|1+\frac{3}{x+2}\right|-\left|1-\frac{3}{x+2}\right|.$$

令 $t=\frac{1}{x+2}$，$t\neq0$，那么只要 $k\geqslant|1+3t|-|1-3t|$ 在 $t\neq0$ 时恒成立.

因为 $|1+3t|-|1-3t|\leqslant|1+3t+1-3t|=2$，所以只要 $k\geqslant2$ 即可.

故实数 k 的取值范围为 $[2,+\infty)$. …………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。