

绝密★启用前

# 河北省 2023 届高三年级大数据应用调研联合测评(IV)

## 数 学

班级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级和考号填写在答题卡上。
  - 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
  - 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
- 一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。下列每小题所给选项只有一项符合题意,请将正确答案的序号填涂在答题卡上。

- 已知集合  $A = \left\{ x \mid y = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right\}$ ,  $B = \{ y \mid y = \ln(x^2 + 1) \}$ , 则下列说法正确的是  
 A.  $A \cap B = \emptyset$       B.  $A \subset \complement_U B$       C.  $\complement_U A \subset B$       D.  $A = B$
- 已知复数  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$ ) 满足  $|z|^2 - 2z = 1 + 2i$ , 则  $|z| =$   
 A. 1      B.  $\sqrt{3}$       C. 2      D.  $\sqrt{5}$
- 已知向量  $a$  与向量  $b$  共线,  $a = (-4, 3)$ ,  $|b| = 10$ , 且向量  $b$  与向量  $c = (1, 1)$  的夹角为锐角, 则向量  $b =$   
 A.  $(-8, 6)$       B.  $(6, -8)$       C.  $(8, -6)$       D.  $(-6, 8)$
- 已知有四个不同的小球  $A, B, C, D$ , 准备放入四个不同的盒子之中, 则小球  $A, B$  放入到同一个盒子中的概率为  
 A.  $\frac{1}{8}$       B.  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{3}{8}$       D.  $\frac{1}{2}$
- 已知函数  $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3}$  ( $\omega > 0$ ) 在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上有三个零点, 则  $\omega$  的取值范围为  
 A.  $\left[\frac{25}{6}, \frac{29}{6}\right)$       B.  $\left[\frac{23}{6}, \frac{31}{6}\right)$       C.  $\left(\frac{25}{6}, \frac{29}{6}\right]$       D.  $\left(\frac{23}{6}, \frac{31}{6}\right]$
- 已知三棱锥  $P-ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $\angle PAB = \angle PAC = 60^\circ$ , 则直线  $PA$  与平面  $ABC$  所成角的大小为  
 A.  $\frac{\pi}{6}$       B.  $\frac{\pi}{4}$       C.  $\frac{\pi}{3}$       D.  $\frac{\pi}{2}$
- 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点为  $F(c, 0)$ , 直线  $l$  过点  $F$  且与该双曲线的渐近线分别交于点  $A(-2a, y_0), B\left(x, \frac{y_0}{3}\right)$ , 则该双曲线的离心率为  
 A.  $\frac{3}{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C. 2      D.  $2\sqrt{3}$

8. 已知函数  $g(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x}$  在  $(1, e^2)$  上存在极值, 则实数  $a$  的取值范围为

- A.  $(1, \frac{e}{2})$       B.  $(0, \frac{e}{2})$       C.  $(0, 1)$       D.  $(0, e)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 每题给出的选项中有多项符合要求, 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 错选得 0 分.

9. 已知函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称, 关于  $(2, 0)$  对称, 则下列说法正确的是

- A.  $f(2-x) = f(x)$       B.  $f(4-x) = f(x)$   
C.  $f(4-x) = -f(x)$       D.  $f(4+x) = f(x)$

10. 已知抛物线  $x^2 = 2py (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 过点  $F$  且斜率为  $\sqrt{3}$  的直线  $l$  与该抛物线相交于  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$  两点 (其中  $x_1 > 0$ ), 则下面说法正确的是

- A. 若  $p=2$ , 则  $x_1 x_2 = -4$       B. 若  $y_1 y_2 = 1$ , 则  $p=2$   
C. 若  $p=2$ , 则  $S_{\triangle OMN} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$       D. 若  $p=2$ , 则  $|MF| = 8 + 4\sqrt{3}$

11. 已知各项均为正数的数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1} + 2 (n \geq 2), b_n = na_n$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 则下面说法正确的是

- A.  $a_3 = 26$       B.  $a_n = 3^n - 2$   
C.  $T_n = \frac{(2n-1) \times 3^{n+1} - 2n^2 - 2n + 3}{4}$       D.  $\frac{a_1+1}{a_1 a_2} + \frac{a_2+1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{a_n+1}{a_n a_{n+1}} < \frac{1}{4}$

12. 已知矩形  $ABCD$  中,  $AD = \sqrt{3} AB = 2\sqrt{3}$ ,  $\triangle ABD$  沿着  $BD$  折起使得形成二面角  $A'-BD-C$ , 设二面角  $A'-BD-C$  的平面角为  $\theta$ , 则下面说法正确的是

- A. 在翻折的过程中,  $A', B, C, D$  四点始终在一个球面上, 且该外接球的表面积为  $12\pi$   
B. 存在  $\theta$ , 使得  $A'B \perp CD$   
C. 当  $\tan \theta = 2\sqrt{2}$  时,  $|A'C| = 2\sqrt{2}$   
D. 当  $\cos \theta = \frac{1}{3}$  时, 直线  $A'C$  与直线  $BD$  的夹角为  $45^\circ$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知正项等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_2^2 + 2a_2 a_6 + a_6^2 - 4 = 0$ , 则  $a_4 =$  \_\_\_\_\_.

14. 已知病毒  $A$  在某溶液中的存活个数  $(k)$  的概率满足  $P(X=k) = \frac{3^k}{k!} e^{-3} (k=0, 1, 2, \dots)$ , 已知只要该溶液中存在一个  $A$  病毒, 就可以导致生物  $C$  死亡, 则该溶液能够导致生物  $C$  死亡的概率为 \_\_\_\_\_.

15. 已知定义域为  $\mathbf{R}$  函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & 0 < x \leq 2, \\ \log_{\frac{1}{2}}(2x - \frac{15}{4}), & x > 2, \end{cases}$  且满足  $f(-x) = -f(x)$ , 函数

$g(x) = kx$ , 若函数  $h(x) = f(x) - g(x)$  有 7 个零点, 则  $k$  的取值范围为 \_\_\_\_\_;  
若方程  $f(x) = m (m > 0)$  的解为  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 则  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.  
(本题第一个空 2 分, 第二个空 3 分)

16. 已知函数  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}x^2 - ax \geq 0$  在  $x \in [0, +\infty)$  上恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分,其中第 17 题 10 分,其余每题 12 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤,写在答题卡的相应位置.

17. (本小题满分 10 分) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且满足

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin A - \sin C} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B}.$$

(1) 求角  $A$  的大小;

(2) 若  $a = \sqrt{7}$ ,  $\triangle ABC$  的角平分线  $AD$  与边  $BC$  相交于点  $D$ , 且  $AD = \frac{2}{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

18. (本小题满分 12 分) 由于人们对工业高度发达的负面影响预料不够, 预防不利, 导致了全球性的三大危机: 资源短缺、环境污染、生态破坏. 环境污染指自然的或人为的破坏, 向环境中添加某种物质而超过环境的自净能力而产生危害的行为 (或由于人为的因素, 环境受到有害物质的污染, 使生物的生长繁殖和人类的正常生活受到有害影响). 由于人为因素使环境的构成或状态发生变化, 环境质量下降, 从而扰乱和破坏了生态系统和人类的正常生产和生活条件的现象. 据研究, 某种污染物具有极强的污染力, 现在对这种污染物的污染力进行调查研究, 通过实验调查, 可以得到某地区该污染物到来后的污染时间  $t$  (小时) 与该污染物的污染面积  $y$  (平方米) 的一些数据如下:

$t$	1	2	3	4
$y$	$e$	$e^3$	$e^4$	$e^5$

通过分析可知, 数据  $t$  与  $\ln y$  之间存在很强的线性回归关系.

(1) 求出  $t$  与  $y$  之间的关系式;

(2) 根据(1)中的关系式, 该污染物到来后的污染时间是多少时, 该污染物的污染面积的平均增长最慢?

参考公式: 对于一组数据  $(u_i, v_i) (i=1, 2, 3, \dots, n)$ , 其回归直线  $\hat{v} = \hat{\beta}u + \hat{\alpha}$  的斜率和截距

$$\text{的最小二乘估计分别为 } \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}, \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}.$$

19. (本小题满分 12 分) 已知等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n + a_{n-1} = 8n + 2 (n \geq 2)$ , 数列  $\{b_n\}$  是公比为 3 的等比数列,  $a_2 + b_2 = 20$ .

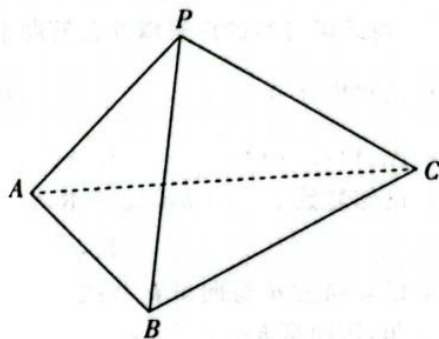
(1) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(2) 数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  中的项由小到大组成新的数列  $\{c_n\}$ , 记数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 求  $S_{50}$ .

20. (本小题满分 12 分) 已知在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA = PB = PC = AC$ ,  $\triangle ABC$  为以  $AC$  为斜边的等腰直角三角形.

(1) 证明: 平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ ;

(2) 设  $PA = 2$ , 存在该几何体外的一点  $D$ , 使得  $\triangle BCD$  为等边三角形, 平面  $BCD$  与平面  $ABC$  所成的锐二面角的正切值为  $\sqrt{2}$ , 求  $AD$  的长.



21. (本小题满分 12 分) 已知焦点在  $y$  轴上的椭圆  $E$  的焦距为 2, 左、右端点分别为  $A, B$ , 点  $P$  是椭圆  $E$  上不同于  $A, B$  的一点, 且满足  $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{4}{3}$ .

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 过椭圆  $E$  的上焦点作两条互相垂直的直线  $l_1, l_2$ ,  $l_1, l_2$  分别与椭圆  $E$  交于点  $M, N$  和点  $P, Q$ ,  $S, T$  分别为  $MN, PQ$  的中点, 问直线  $ST$  是否过定点? 如果过定点, 求出该定点; 如果不过定点, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分) 已知函数  $f(x) = (mx^2 + 1)e^{-x} (m \in \mathbf{R})$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若函数  $g(x) = f(x) + nxe^{-x} - 1$  在  $(0, 1)$  上有零点, 且  $m + n = e - 1$ , 求实数  $m$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

