# 高三数学考试参考答案(理科)

1. A 【解析】本题考查集合的运算，考查数学运算的核心素养.

因为 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|x\geqslant \frac{a}{2}\}$，且 $A\cap B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，所以 $\frac{a}{2}=-2$，解得 $a=-4$.

2. C 【解析】本题考查复数的有关概念，考查数学运算的核心素养.

因为 $\frac{5}{1+(1+i)^2}=\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{5}=1-2i$，所以 $\frac{5}{1+(1+i)^2}$ 的虚部是 $-2$.

3. B 【解析】本题考查导数的几何意义，考查数学运算的核心素养.

因为 $f'(x)=(x^2+2x)e^{x-1}-a$，所以 $f'(1)=3-a=2$，解得 $a=1$.

4. D 【解析】本题考查统计的知识，考查数据分析与数学运算的核心素养.

对于 A，由 $1000\times(1-18\%)=820$，知 30 岁以上人群拥有汽车的人数为 820，故 A 错误；

对于 B，由图得不出 40～45 岁之间的人群拥有汽车的人数最多，故 B 错误；

对于 C，55 岁以上人群每年购买车险的总费用约为 $1000\times17\%\times3100=527000$ 元，18～30 岁之间的人群每年购买车险的总费用约为 $1000\times18\%\times2800=504000$ 元，故 C 错误；

对于 D，40～55 岁之间的人群每年购买车险的总费用约为 $1000\times40\%\times3900=1560000$ 元，$1560000>527000+504000$，故 D 正确.

5. C 【解析】本题考查线性规划，考查数学运算与直观想象的核心素养.

画出可行域(图略)知，当直线 $z=3x-2y$ 经过点 $(2,-4)$ 时，$z$ 最大，且 $z$ 的最大值为 14.

6. A 【解析】本题考查双曲线的性质，考查数学运算的核心素养.

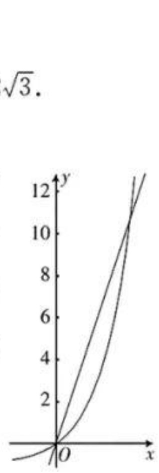
因为 $\frac{b}{a}=2$，所以 $b=2a$，把点 $(\sqrt{3},2)$ 的坐标代入方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$，得 $a^2=2$，所以 $b^2=8$，则 $C$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$.

7. D 【解析】本题考查解三角形的知识，考查数学运算的核心素养.

因为 $b\cos A=a(\sqrt{3}-\cos B)$，所以 $\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A-\sin A\cos B$，

移项得 $\sin B\cos A+\sin A\cos B=\sqrt{3}\sin A$，即 $\sin C=\sqrt{3}\sin A$，所以 $c=\sqrt{3}a=2\sqrt{3}$.

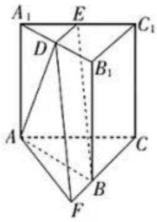
8. B 【解析】本题考查函数的应用，考查直观想象的核心素养.




设当甲、乙再次相遇时，所用的时间为 $t$ 小时，则 $2^t-1=3t$，分别作出 $f(t)=2^t-1$，$g(t)=3t$ 的大致图象，令 $F(t)=2^t-1-3t$，则 $F'(t)=2^t\ln 2-3$ 为增函数，$F(t)=2^t-1-3t$ 有唯一的极值点 $t_0=\log_2\frac{3}{\ln 2}$，则 $F(t)=2^t-1-3t$ 在 $(0,t_0)$ 上单调递减，在 $(t_0,+\infty)$ 上单调递增，由于 $F(2)<0$，$F(3)<0$，$F(4)>0$，所以 $t\in(3,4)$.

9. C 【解析】本题考查异面直线所成的角，考查直观想象的核心素养.

如图，延长 $CB$ 至 $F$，使得 $BF=\frac{1}{2}CB$，连接 $DE,DF,AF$，易证四边形 $BEDF$ 是平行四边形，则$\angle ADF$ 为异面直线 $AD$ 与 $BE$ 所成的角或补角. 设 $AB=AA_1=2$，易求 $DF=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，$AD=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$AF=\sqrt{7}$，设异面直线 $AD$ 与 $BE$ 所成的角为 $\theta$，则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{35}}{14}$.




10. C 【解析】本题考查抽象函数的求值，考查数学抽象的核心素养.

因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，所以 $f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$，即 $f(0)=0$.

所以 $f(\ln 2023)+f(\ln\frac{1}{2023})=f(\ln 2023-\ln 2023)=f(0)=0$.

11. B 【解析】本题考查数学文化与等比数列的求和，考查数学抽象与数学运算的核心素养.

由题意，若正整数 $m\leqslant 6^n$，且与 $6^n$ 不互质，则这个数为偶数或 3 的倍数，共有$\frac{2}{3}\times 6^n$ 个，所以 $\varphi(6^n)=\frac{1}{3}\times 6^n=2\times 6^{n-1}$，即数列$\{\varphi(6^n)\}$是首项为 2，公比为 6 的等比数列，所以 $S_{12}=\frac{2(6^{12}-1)}{6-1}=\frac{2}{5}(6^{12}-1)$.

12. A 【解析】本题考查抛物线的定义及性质，考查直观想象的核心素养.

由题意可知，过 $P$ 所作圆的两条切线关于直线 $x=1$ 对称，所以 $k_{PA}+k_{PB}=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_P,y_P)$，则 $k_{PA}=\frac{y_P-y_1}{x_P-x_1}=\frac{y_P-y_1}{\frac{y_P^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}}=\frac{2p}{y_P+y_1}$，

同理可得 $k_{PB}=\frac{2p}{y_P+y_2}$，$k_{AB}=\frac{2p}{y_1+y_2}$，则$\frac{2p}{y_P+y_1}+\frac{2p}{y_P+y_2}=0$，得$\frac{2p(y_1+y_2+2y_P)}{(y_P+y_1)(y_P+y_2)}=0$，所以 $y_1+y_2=-2y_P$，由 $k_{AB}=\frac{2p}{y_1+y_2}=\frac{2p}{-2y_P}=-1$，得 $y_P=p$.

将$(1,p)$代入抛物线 $C$ 的方程，得 $p^2=2p$，解得 $p=2$，故抛物线 $C$ 的方程为 $y^2=4x$.

设$\angle MNF=\theta$，作 $MM'$垂直准线于 $M'$(图略)，由抛物线的性质可得$|MM'|=|MF|$，

所以$\frac{|MN|}{|MF|}=\frac{|MN|}{|MM'|}=\frac{1}{\cos\theta}$，当 $\cos\theta$ 最小时，$\frac{|MN|}{|MF|}$的值最大，

所以当直线 $MN$ 与抛物线 $C$ 相切时，$\theta$ 最大，即 $\cos\theta$ 最小. 由题意可得 $N(-1,0)$，

设切线 $MN$ 的方程为 $x=my-1$，联立方程组$\begin{cases}x=my-1,\\y^2=4x,\end{cases}$消去 $x$，得 $y^2-4my+4=0$，由 $\Delta=16m^2-16=0$，可得 $m=\pm1$，将 $m=\pm1$ 代入 $y^2-4my+4=0$，可得 $y=\pm2$，所以 $x=1$，即 $M$ 的坐标为$(1,\pm2)$，所以$|MN|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$|MM'|=1-(-1)=2$，所以$\frac{|MN|}{|MF|}$的最大值为$\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

13. 9 【解析】本题考查平面向量的垂直，考查数学运算的核心素养.

因为 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2\lambda-1,2-3\lambda)$，$(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，所以 $4(2\lambda-1)+3(2-3\lambda)=0$，解得 $\lambda=2$，则 $\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(0,-9)$，$|\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=9$.

14. 70 **【解析】本题考查等差数列的求和，考查数学运算的核心素养.**

设公差为 $d$，因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $2(a_1+4d)-(a_1+5d)=10$，化简得 $a_1+3d=10$，即 $a_4=10$，所以 $S_7=7a_4=70$.

15. $36\pi$ **【解析】本题考查三棱柱的外接球的表面积，考查直观想象的核心素养.**

由题设知 $AB,AC,AA_1$ 两两垂直，设直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的半径为 $R$，则 $2R=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$，解得 $R=3$，所以所求外接球的表面积 $S=4\pi R^2=36\pi$.

16. 180 **【解析】本题考查排列组合的知识，考查数学建模与数学运算的核心素养.**

若 A 与其他一人参加同一个项目，则有 $C_3^1C_4^1A_3^3=72$ 种；若 A 独自一人参加一个项目，则有 $C_3^1C_4^2A_3^3=108$ 种. 故共有 $72+108=180$ 种不同的安排方案.

17. 解：(1)因为 $f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x-1=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x-1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$，…… 3 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi$. …… 4 分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$. …… 6 分

(2)因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以 $2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，…… 8 分

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin(2x-\frac{\pi}{4})\leqslant 1$，所以 $-1\leqslant f(x)\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，…… 10 分

当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{3\pi}{8}$ 时，$f(x)_{\max}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，此时 $x=\frac{3\pi}{8}$. …… 12 分

评分细则：

【1】第一问，将 $f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x-1$ 化简为 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$，得 3 分，求出最小正周期，累计得 4 分，第一问全部正确解出，累计得 6 分.

【2】第二问，求出 $2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，累计得 8 分，求出 $-1\leqslant f(x)\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，累计得 10 分，最后求出正确答案，累计得 12 分.

18. 解：(1)由题意可知，$(0.006\times 2+a+0.012+0.026+0.04)\times 10=1$，解得 $a=0.01$. …… 2 分

$\mu=(45+95)\times 0.06+55\times 0.12+65\times 0.4+75\times 0.26+85\times 0.1=69$. …… 4 分

(2)设参加知识竞赛的每位学生获得的学校食堂消费券为 $Y$ 元，

$P(Y=0)=P(X\leqslant 57)=0.5-\frac{0.6827}{2}=0.15865$， …………………………………… 5 分

$P(Y=5)=P(57<X\leqslant 81)=0.6827$， …………………………………………………… 6 分

$P(Y=10)=P(81<X\leqslant 93)=\frac{0.9545-0.6827}{2}=0.1359$， ………………………… 7 分

$P(Y=15)=P(X>93)=\frac{1-0.9545}{2}=0.02275$， ………………………………………… 8 分

$Y$ 的分布列如下表：

| $Y$ | 0 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.15865 | 0.6827 | 0.1359 | 0.02275 |

………………………………………………………………………………………………… 10 分

$E(Y)=5\times 0.6827+10\times 0.1359+15\times 0.02275=5.11375$， ………………… 11 分

$1000\times 5.11375=5113.75\approx 5114$(元)，

故估计全校 1000 名学生参加知识竞赛共可获得食堂消费券 5114 元. ………………… 12 分

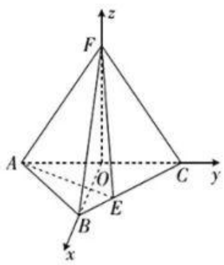
评分细则：

【1】第一问，求出 $a=0.01$，得 2 分，求出 $\mu=69$，累计得 4 分.

【2】第二问，每求出一个概率得 1 分，正确写出分布列累计得 10 分，正确写出期望累计得 11 分，直至最后写出正确结果为 5114 元，累计得 12 分.

【3】采用其他方法，参照本评分标准依步骤给分.

19. (1)证明：连接 $OB$，因为$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle B=90°$，$AB=2\sqrt{2}$，




所以 $AC=4$，$OB=2$. ………………………………………………… 1 分

在等边三角形 $FAC$ 中，$FO\perp AC$，$FO=4\times\sin 60°=2\sqrt{3}$. ……… 2 分

又 $FB=4$，所以 $FO^2+OB^2=FB^2$，即 $FO\perp OB$. ………………… 4 分

因为 $AC\cap OB=O$，所以 $FO\perp$平面 $ABC$. ………………………… 5 分

(2)解：以 $O$ 为坐标原点，$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OF}$的方向分别为 $x,y,z$ 轴的正方向建立空间直角坐标系，

则 $A(0,-2,0)$，$E(\frac{4}{3},\frac{2}{3},0)$，$F(0,0,2\sqrt{3})$， ………………………………… 6 分

$\overrightarrow{AF}=(0,2,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AE}=(\frac{4}{3},\frac{8}{3},0)$. ……………………………………… 7 分

设平面 $FAE$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}2y+2\sqrt{3}z=0,\\ \frac{4x}{3}+\frac{8y}{3}=0,\end{cases}$令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$. ……………………… 10 分

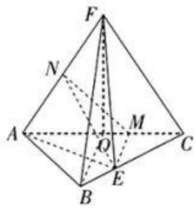
易知平面 $FAC$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$. …………………………………… 11 分

设二面角 $E-FA-C$ 的大小为 $\theta$，则 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………… 12 分

评分细则:

(方法二)(1)同上(1). ………………………………………………………… 5 分

(2)作 $EM\perp AC$,垂足为 $M$,作 $MN\perp AF$,垂足为 $N$,连接 $EN$. …… 6 分




易证 $EM\perp$平面 $ACF$,从而 $EM\perp AF$. 又 $MN\perp AF$,$MN\cap EM=M$,所以 $AF\perp$平面 $EMN$,则 $AF\perp EN$,所以二面角 $E-FA-C$ 的平面角为 $\angle ENM$. ………………………………………… 7 分

因为 $EM/\!/OB$,所以$\frac{EM}{OB}=\frac{EC}{BC}=\frac{2}{3}$,解得 $EM=\frac{4}{3}$. ………………… 9 分

在 $\text{Rt}\triangle AMN$ 中,$\angle FAC=60°$,$AM=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$,所以 $MN=\frac{8}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, ……… 10 分

所以 $EN=\sqrt{(\frac{4}{3})^2+(\frac{4\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{8}{3}$, ………………………………………… 11 分

所以 $\cos\angle ENM=\frac{MN}{EN}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即二面角 $E-FA-C$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………… 12 分

20. 解:(1)因为$\triangle ABF_2$ 的周长为 8,所以 $4a=8$,解得 $a=2$. ………………………… 2 分

将点$(-1,\frac{3}{2})$的坐标代入椭圆方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$,解得 $b=\sqrt{3}$. ………………………… 3 分

所以椭圆 $E$ 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………… 4 分

(2)由(1)知圆 $O$ 的方程为 $x^2+y^2=4$,设直线 $l$ 的方程为 $x=my-1$,

则圆心 $O$ 到直线 $l$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$. ………………………………………………… 5 分

由$|CD|=2\sqrt{4-d^2}\in[2\sqrt{3},\frac{2\sqrt{33}}{3}]$,可得 $m^2\in[0,2]$. ………………………………… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my-1,\end{cases}$消去 $x$ 得$(4+3m^2)y^2-6my-9=0$,

则 $y_1+y_2=\frac{6m}{4+3m^2}$,$y_1y_2=-\frac{9}{4+3m^2}$, ……………………………………………… 7 分

所以 $S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=12\sqrt{\frac{m^2+1}{(4+3m^2)^2}}$. …… 8 分

设 $t=m^2+1\in[1,3]$,则 $S_{\triangle ABF_2}=12\sqrt{\frac{t}{(1+3t)^2}}=12\sqrt{\frac{1}{9t+\frac{1}{t}+6}}$,

易知 $h(t)=9t+\frac{1}{t}+6$ 在$[\frac{1}{3},+\infty)$上单调递增,从而 $h(t)$在$[1,3]$上单调递增, …… 10 分

因为 $16\leqslant h(t)\leqslant\frac{100}{3}$,所以 $S_{\triangle ABF_2}\in[\frac{6\sqrt{3}}{5},3]$. ……………………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，求出 $a=2$，得 2 分，求出 $b=\sqrt{3}$，累计得 3 分，求出标准方程累计得 4 分.

【2】第二问，求出 $d=\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，累计得 5 分，求出 $m^2\in[0,2]$，累计得 6 分，根据韦达定理写出 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{4+3m^2}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{4+3m^2}$，累计得 7 分，求出 $S_{\triangle ABF_2}=12\sqrt{\dfrac{m^2+1}{(4+3m^2)^2}}$，累计得 8 分，直到给出正确结论，累计得 12 分.

【3】第二问，直线 $l$ 的方程也可以设为 $y=k(x+1)$ 和 $x=-1$，参照上述步骤给分.

21.（1）解：若 $a=0$，则 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2(x>0)$，$f'(x)=x\ln x$. ……………………… 1 分

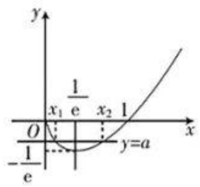
令 $f'(x)>0$，得 $x>1$；令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，………………………………………………………………………… 3 分

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………… 4 分

（2）证明：$f'(x)=x\ln x-a$，因为 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2$，所以 $x_1,x_2$ 是 $x\ln x-a=0$ 的两个根，即 $a=x_1\ln x_1=x_2\ln x_2$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)=\dfrac{1}{2}x_1^2\ln x_1-\dfrac{1}{4}x_1^2-ax_1+\dfrac{1}{2}x_2^2\ln x_2-\dfrac{1}{4}x_2^2-ax_2=-\dfrac{1}{2}x_1^2\ln x_1-\dfrac{1}{4}x_1^2-\dfrac{1}{2}x_2^2\ln x_2-\dfrac{1}{4}x_2^2=-\dfrac{1}{2}x_1x_2\ln x_2-\dfrac{1}{2}x_1x_2\ln x_1-\dfrac{1}{4}(x_2^2+x_1^2)=-\dfrac{1}{4}[2x_1x_2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2]$. ① ……………………………………………… 6 分

令 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=\ln x+1$，当 $x\in(0,\dfrac{1}{e})$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{e})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 上单调递增，$g(x)_{\min}=-\dfrac{1}{e}$，则 $-\dfrac{1}{e}<a<0$，$g(x)=x\ln x$ 的图象如图所示. ……………………………………… 7 分




不妨设 $0<x_1<\dfrac{1}{e}<x_2<1$，$\dfrac{x_2}{x_1}=t(t>1)$，

则 $x_1\ln x_1=x_1t\ln(x_1t)$，所以 $\ln x_1=\dfrac{t\ln t}{1-t}$，

所以 $\ln(x_1x_2)=2\ln x_1+\ln t=\dfrac{2t\ln t}{1-t}+\ln t=\dfrac{(t+1)\ln t}{1-t}<0$，

所以 $2x_1x_2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2<(x_1+x_2)^2$，② ……………………………………… 8 分

下面要证 $x_1+x_2<1$.

$x_2+x_1<1\Leftrightarrow(1+t)x_1<1\Leftrightarrow\ln[(1+t)x_1]<0\Leftrightarrow\ln(1+t)+\ln x_1<0\Leftrightarrow\dfrac{t\ln t}{1-t}+\ln(1+t)<0\Leftrightarrow$

$\dfrac{\ln t}{t-1}>\dfrac{\ln(1+t)}{t}$. ………………………………………………………………… 9 分

令 $h(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $h'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$，令 $v(x)=\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+$

$x$),则 $v'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=-\frac{x}{(1+x)^2}<0$,所以 $v(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $v(x)<v(0)=0$,从而 $h'(x)<0$,所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, …………… 10 分

所以 $h(t)<h(t-1)$,即 $\frac{\ln t}{t-1}>\frac{\ln(1+t)}{t}$,

所以 $x_1+x_2<1$,③ …………………………………………………………………………… 11 分

由②知 $2x_1x_2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2<1$,所以 $-\frac{1}{4}[2x_1x_2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2]>-\frac{1}{4}$,

即 $f(x_1)+f(x_2)>-\frac{1}{4}$. ……………………………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第一问,写出 $f'(x)=x\ln x$,得 1 分,求出 $f(x)$ 的单调区间,累计得 3 分,求出最小值为 $-\frac{1}{4}$,累计得 4 分.

【2】第二问,写出 $f(x_1)+f(x_2)=-\frac{1}{4}[2x_1x_2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2]$,累计得 6 分,推导出 $2x_1x_2\ln(x_1x_2)+x_1^2+x_2^2<(x_1+x_2)^2$,累计得 8 分,分析出要证 $\frac{\ln t}{t-1}>\frac{\ln(1+t)}{t}$,累计得 9 分,证出 $x_1+x_2<1$,累计得 11 分,直至证出 $f(x_1)+f(x_2)>-\frac{1}{4}$,累计得 12 分.

【3】采用其他方法,参照本评分标准依步骤给分.

22. 解:(1)因为 $(x+4)^2+y^2=9$,所以 $x^2+y^2+8x+7=0$, …………………………………… 2 分

由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,可得圆 $C$ 的极坐标方程为 $\rho^2+8\rho\cos\theta+7=0$. ………… 4 分

(2)因为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ 所以 $\frac{y}{x}=\tan\alpha$,即直线 $l$ 的直角坐标方程为 $x\tan\alpha-y=0$. ……… 5 分

圆心 $C(-4,0)$ 到直线 $l$ 的距离 $d=\frac{4|\tan\alpha|}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, ………………………………………… 7 分

因为 $d^2+\frac{|AB|^2}{4}=9$,所以 $\frac{16\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}+1=9$, ……………………………………………… 9 分

解得 $\tan\alpha=\pm1$,即 $l$ 的斜率为 $\pm1$. ……………………………………………………… 10 分

评分细则:

(方法二)(1)同上(1). ……………………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$ 所以 $\frac{y}{x}=\tan\alpha$,因为 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,所以 $\tan\theta=\tan\alpha$,即直线 $l$ 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$. ……………………………………………………………………… 5 分

设 $A,B$ 对应的极径分别为 $\rho_1,\rho_2$,将 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$ 代入 $C$ 的极坐标方程 $\rho^2+8\rho\cos\theta+7=0$,得 $\rho^2+8\rho\cos\alpha+7=0$,

所以 $\rho_1+\rho_2=-8\cos\alpha, \rho_1\rho_2=7$. ……………………………………………………… 6 分

因为 $|AB|=2$,所以 $|\rho_1-\rho_2|=2$,即 $\sqrt{64\cos^2\alpha-28}=2$, ……………………………… 8 分

解得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$，…………………………………………………… 9 分

所以 $\tan^2\alpha=1$，从而 $\tan\alpha=\pm1$，即 $l$ 的斜率为 $\pm1$. ………………………………… 10 分

23. 解：(1)若 $a=1$，则 $f(x)=|x-2|+2$.

因为 $f(x)\leqslant4$，所以 $|x-2|+2\leqslant4$，即 $|x-2|\leqslant2$， ……………………………… 2 分

所以 $-2\leqslant x-2\leqslant2$，解得 $0\leqslant x\leqslant4$，即原不等式的解集为 $[0,4]$. ……………………… 4 分

(2)不等式 $f(x)+g(x)\geqslant5$ 可化为 $|x-2a|+|x-1|\geqslant5-2a$.

当 $a\geqslant\frac{5}{2}$ 时，$5-2a\leqslant0$，原不等式恒成立，所以 $a\geqslant\frac{5}{2}$. …………………………………… 5 分

当 $a<\frac{5}{2}$ 时，$|x-2a|+|x-1|\geqslant5-2a$ 恒成立，所以 $(|x-2a|+|x-1|)_{\min}\geqslant5-2a$. ……

……………………………………………………………………………………………… 7 分

因为 $|x-2a|+|x-1|\geqslant|2a-1|$，所以 $|2a-1|\geqslant5-2a$，

所以 $4a^2-4a+1\geqslant25-20a+4a^2$，解得 $\frac{3}{2}\leqslant a<\frac{5}{2}$. ……………………………………… 9 分

综上，$a\geqslant\frac{3}{2}$，即 $a$ 的取值范围为 $[\frac{3}{2},+\infty)$. ……………………………………………… 10 分

评分细则：

【1】第一问，写出 $|x-2|\leqslant2$，得 2 分，求出原不等式的解集为 $[0,4]$，累计得 4 分.

【2】第二问，第一个讨论，并求出解集，累计得 5 分，第二个讨论，并求出解集，累计得 9 分，综合上述讨论，最后写出正确结果，累计得 10 分.