文科数学八调 4.5 参考答案

1. $A=(0,\ 2)$，$B=(-1,\ 1)$，所以 $A\cap B=(0,\ 1)$，故选 C.

2. 已知 $z=1\cdot(1+\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{2}$，故选 B.

3. $P=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，故选 C.

4. 由 $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{b}$，有 $\vec{a}\vec{b}-\vec{b}^2=0$，则 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\vec{b}^2$，有 $\cos\theta=\dfrac{\vec{b}^2}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，故选 B.

5. 内切球的半径 $r_1=\dfrac{1}{2}$，外接球的半径 $r_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以表面积之比为 $\dfrac{S_1}{S_2}=\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2=\dfrac{1}{3}$，故选 C.

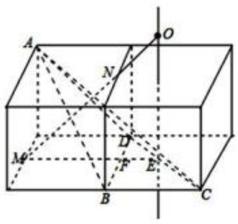
6. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\sin\theta=\cos\theta\cdot\sin\theta=\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{-2}{1+4}=-\dfrac{2}{5}$，故选 B.

7. C

8. $f(x+3)=-f(x)\Rightarrow f(x+6)=f(x)$，$T=6$，$f(\log_2 192)=f(\log_2 64\times 3)=f(6+\log_2 3)=f(\log_2 3)$

$=2^{\log_2 3}=3$，故选 D.

9. B　　由三视图可知该几何体是如图所示的三棱锥 $A-BCD$，



F 为 BD 的中点，外接球球心 O 在过 CD 的中点 E 且垂直于平面 BCD 的直线 l 上，又点 O 到 A,B,D 的距离相等，所以 O 又在过左边正方体一对棱的中点 M,N 所在直线上，在 ΔOEN 中，由 $\dfrac{NF}{NE}=\dfrac{MF}{OE}$，即 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{OE}$，得 $OE=3$，

所以三棱锥 $A-BCD$ 外接球的球半径 $R=\sqrt{OE^2+BE^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}$，

$V=\dfrac{44\sqrt{11}\pi}{3}$.

10. B

11．设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则以 A 为切点的切线方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $y=\frac{x_1}{2}x-y_1$ ①；

同理，以 B 为切点的切线方程为 $y=\frac{x_2}{2}x-y_2$ ②，$P(x_0, y_0)$ 代入①，②得 $\begin{cases} y_0=\frac{x_1}{2}x_0-y_1, \\ y_0=\frac{x_2}{2}x_0-y_2, \end{cases}$

所以直线 AB 的方程为 $y_0=\frac{x}{2}x_0-y$，即 $y=\frac{x_0}{2}x-y_0$，又 $y_0=x_0-2$，即 $y=x_0\left(\frac{x}{2}-1\right)+2$，

AB 过定点 $P(2, 2)$，当 $PF\perp AB$ 时，∴ $F(0, 1)$ 到 l 的距离的最大值为 $\sqrt{(2-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$．当 AB 过点 F 时，距离的最小值为 0，故选 D.

12．由 $f(x)=0$，得 $[ae^x-(x+2)][(2a-1)e^x-(x+2)]=0$，即 $a=\frac{x+2}{e^x}$，$2a-1=\frac{x+2}{e^x}$，

$g(x)=\frac{x+2}{e^x}$，$g'(x)=\frac{-(x+1)}{e^x}$，$g'(x)>0 \Rightarrow x<-1$，$g'(x)>0 \Rightarrow x>-1$，$g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增，在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减．$g(-2)=0$，$g(x)_{\max}=g(-1)=e$，当 $x>-2$，$g(x)>0$. $x\to-\infty$，$g(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$，$g(x)\to0^+$．要使方程有 4 个不同的零点，

则 $\begin{cases} 0<a<e, \\ 0<2a-1<e, \\ 2a-1\neq a \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}<a<\frac{1+e}{2}$，$a\neq1$，故选 D.

13.　-3

14.　2020　　0

$\because g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$，$\therefore g'(x)=x^2-x+3$，$g''(x)=2x-1$，令 $g''(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，

又 $g\left(\frac{1}{2}\right)=1$，所以，三次函数 $y=g(x)$ 图象的对称中心坐标为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$，即 $g(x)+g(1-x)=2$，

所以，$g\left(\frac{1}{2021}\right)+g\left(\frac{2}{2021}\right)+\cdots+g\left(\frac{2020}{2021}\right)=1010\times2=2020$，

$\because(-1)^{2n-2}g'\left(\frac{2n-1}{2021}\right)+(-1)^{2n-1}g'\left(\frac{2n}{2021}\right)=g'\left(\frac{2n-1}{2021}\right)-g'\left(\frac{2n}{2021}\right)$

$=\left(\frac{2n-1}{2021}\right)^2-\frac{2n-1}{2021}+3-\left[\left(\frac{2n}{2021}\right)^2-\frac{2n}{2021}+3\right]=\frac{2022-4n}{2021^2}$,

因此，

$\sum\limits_{i=1}^{2020}(-1)^{i-1}g'\left(\frac{i}{2021}\right)=\sum\limits_{n=1}^{1010}\left[(-1)^{2n-2}g'\left(\frac{2n-1}{2021}\right)+(-1)^{2n-1}g'\left(\frac{2n}{2021}\right)\right]$

$=\sum\limits_{n=1}^{1010}\frac{2022-4n}{2021^2}=\frac{2022\times1010-4\times\frac{1010\times(1+1010)}{2}}{2021^2}=0$.

15．$\begin{cases}x^2+y^2=c^2,\\ y=\frac{b}{a}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a,\\ y=b,\end{cases}$ $\therefore P(a,\ b)$，$F_2(c,\ 0)$，$\therefore M\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b}{2}\right)$，代入双曲线方程得

$c^2+2ac-4a^2=0\Rightarrow e^2+2e-4=0$，$e=-1\pm\sqrt{5}$，又$e>1$，所以$e=\sqrt{5}-1$.

16．由$na_n-(n-1)a_{n+1}=2$，令$n=1$，得$a_1=2$.由$na_n-(n-1)a_{n+1}=2$①，得$(n+1)a_{n+1}-na_{n+2}=2$

②，①−②得$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$，$\{a_n\}$为等差数列．又$a_1=2>0$，S_5最大，则只$d<0$，

$a_5>0$，$a_6<0$，即$\begin{cases}2+4d>0,\\ 2+5d<0\end{cases}\Rightarrow-\frac{1}{2}<d<-\frac{2}{5}$，又$S_5=10+10d\in(5,\ 6)$.

17．（本小题满分 12 分）

（1）解：$\because\{a_n\}$为等差数列，设公差为d，

$\therefore\begin{cases}a_1+d=2,\\ a_1+a_1+3d=5,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a_1=1,\\ d=1,\end{cases}$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=n.$ ……………………………………………（3 分）

$\because\{b_n\}$为等比数列，$b_n>0$，设公比为q，则$q>0$，

$\therefore b_2\cdot b_4=b_3^2=\frac{1}{64}$，$b_3=\frac{1}{8}=b_1q^2$，

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）畅销年个数：4，其中的狂欢年个数：2，记畅销年中不是狂欢年为 a，b；狂欢年为 A，B，则总共有 $(a,\ b)$，$(a,\ A)$，$(b,\ A)$，$(a,\ B)$，$(b,\ B)$，$(A,\ B)$，则 $P(A)=\frac{5}{6}$.

……………………………………………………（4 分）

（2）由题意 $y=cx^2+d$ 更适宜.　　……………………………………（6 分）

（3）$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}t_iy_i-10\bar{t}\,\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{10}t^2-10\bar{t}^2}=\dfrac{67770-10\times38.5\times102}{25380-14830}=\dfrac{28500}{10550}=\dfrac{570}{211}\approx2.7$，

……………………………………………………（8 分）

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=102-2.7\times38.5\approx-2.0$，　　……………………………………（10 分）

$\therefore\ \hat{y}=2.7x^2-2.0$，当 $x=11$ 时，$\hat{y}=324.7$(十亿元)，

$\therefore$ 预测2020年双十一的销售额为324.7十亿元.　　……………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）$c=\sqrt{2}$，设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

$x_1+x_2=\frac{3}{2}$，$y_1+y_2=-\frac{1}{2}$，

$$\begin{cases}b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2,\\ b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2,\end{cases}$$

$\therefore\ b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，　　……………………………（2 分）

$\therefore\ k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=\dfrac{3b^2}{a^2}=1$，

$\therefore\ a^2=3b^2$.　　……………………………………………………（4 分）

$\because\ a^2-b^2=c^2$，$\therefore\ \begin{cases}a^2=3,\\ b^2=1,\end{cases}$

$\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.　　………………………………

(2) $\because M$，Q，N 三点共线，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{ON}$，

$\therefore \frac{1}{3}+\frac{\lambda}{3}=1$，$\lambda=2$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2=0$，

$\therefore x_1=-2x_2$. ……………………………………(7 分)

$\begin{cases} y=kx+m, \\ x^2+3y^2=3 \end{cases} \Rightarrow (1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-3=0$,

$\Delta>0 \Rightarrow 3k^2-m^2+1>0$①

$x_1+x_2=-\frac{6km}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3m^2-3}{1+3k^2}$，

代入 $x_1=-2x_2$ 得 $x_2=\frac{6km}{1+3k^2}$，$-2x_2^2=\frac{3m^2-3}{1+3k^2}$，

$\therefore -2\times\frac{36k^2m^2}{(1+3k^2)^2}=\frac{3m^2-3}{1+3k^2}$，即 $(9m^2-1)\cdot 3k^2=1-m^2$. ……………………………………(9 分)

$\because 9m^2-1\neq 0$，$m^2\neq\frac{1}{9}$，$\therefore 3k^2=\frac{1-m^2}{9m^2-1}\geqslant 0$②，

代入①式得 $\frac{1-m^2}{9m^2-1}-m^2+1>0$，

即 $\frac{1-m^2}{9m^2-1}+(1-m^2)>0$，$\therefore m^2(m^2-1)(9m^2-1)<0$，……………………………………(11 分)

$\therefore \frac{1}{9}<m^2<1$ 满足②式，$\therefore \frac{1}{3}<m<1$ 或 $-1<m<-\frac{1}{3}$.……………………………………(12 分)

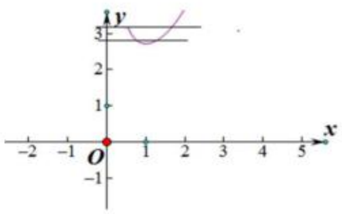
21. (1) $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时，由 $f(x)=0$ 得 $a=\frac{e^x}{x}$，令 $h(x)=\frac{e^x}{x}\Rightarrow h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$\therefore \frac{1}{2}\leq x<1$ 时，$h'(x)<0$，$1<x\leq 2$ 时，$h'(x)>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上是减函数，在 $(1,2)$ 上是增函数.

又 $h\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{e}$，$h(2)=\frac{e^2}{2}$，$h(1)=e$ $\qquad \frac{e^4}{4}-4e=\frac{e^4-16e}{4}=\frac{e(e^3-16)}{4}>0$

$\therefore h(2) > h\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$\therefore$h（x）的大致图像：



利用 $y=h(x)$ 与 $y=a$ 的图像知 $a\in\left(e,2\sqrt{e}\right)$. ……………………………………………4 分

（2）由已知 $g(x)=e^x-ax^2-ax$，$\therefore g'(x)=e^x-2ax-a$，

因为 x_1，x_2 是函数 $g(x)$ 的两个不同极值点（不妨设 $x_1<x_2$），

易知 $a>0$（若 $a\le 0$，则函数 $f(x)$ 没有或只有一个极值点，与已知矛盾），

且 $g'(x_1)=0$，$g'(x_2)=0$. 所以 $e^{x_1}-2ax_1-a=0$，$e^{x_2}-2ax_2-a=0$.

两式相减得 $2a=\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$， ………………………………7 分

于是要证明 $\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln(2a)$，即证明 $e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}$，两边同除以 e^{x_2}，

即证 $e^{\frac{x_1-x_2}{2}}<\dfrac{e^{x_1-x_2}-1}{x_1-x_2}$，即证 $(x_1-x_2)e^{\frac{x_1-x_2}{2}}>e^{x_1-x_2}-1$，即证 $(x_1-x_2)e^{\frac{x_1-x_2}{2}}-e^{x_1-x_2}+1>0$，

令 $x_1-x_2=t$，$t<0$. 即证不等式 $te^{\frac{t}{2}}-e^t+1>0$，当 $t<0$ 时恒成立.

设 $\varphi(t)=te^{\frac{t}{2}}-e^t+1$，则 $\varphi'(t)=te^{\frac{t}{2}}+t\cdot e^{\frac{t}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}-e^t=\left(\dfrac{t}{2}+1\right)e^{\frac{t}{2}}-e^t=-e^{\frac{t}{2}}\left[e^{\frac{t}{2}}-\left(\dfrac{t}{2}+1\right)\right]$.

设 $h(t)=e^{\frac{t}{2}}-\dfrac{t}{2}-1$，则 $h'(t)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}-1\right)$，

当 $t<0$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减，所以 $h(t)>h(0)=0$，即 $e^{\frac{t}{2}}-\left(\dfrac{t}{2}+1\right)>0$，所以 $\varphi'(t)<0$，

所以 $\varphi(t)$ 在 $t<0$ 时是减函数. 故 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处取得最小值 $\varphi(0)=0$.

所以 $\varphi(t)>0$ 得证. 所以 $\dfrac{x_1+x_2}{2}<\ln(2a)$. ……………………………………………

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

解：（1）C_1：$(x-2)^2+y^2=4$，$x^2-4x+y^2=0$. ……………………（2 分）

C_2：$x^2+y^2=4y-3$, ……………………（4 分）

$\therefore l_{MN}$：$-4x+4y-3=0$，$\therefore 4x-4y+3=0$. ……………………（5 分）

（2）l_{MN}：$y=x+\dfrac{3}{4}$，$\therefore P\left(-\dfrac{3}{4},\ 0\right)$在$l_{MN}$上，

直线MN的参数方程为$\begin{cases} x=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$为参数），代入$C_1$：$(x-2)^2+y^2=4$，………（7 分）

整理得$t^2-\dfrac{11\sqrt{2}}{4}t+\dfrac{57}{16}=0$,

$\therefore t_1+t_2=\dfrac{11\sqrt{2}}{4}$，$t_1t_2=\dfrac{57}{16}$，$\therefore t_1>0$，$t_2>0$, ……………………（9 分）

$|PM|+|PN|=t_1+t_2=\dfrac{11\sqrt{2}}{4}$. ……………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

（1）解：当$a=1$时，$f(x)=|x-1|+|2x+2|$；

①当$x\leqslant -1$时，$f(x)=1-x-2x-2\geqslant 4$，得$x\leqslant -\dfrac{5}{3}$；

②当$-1<x<1$时，$f(x)=1-x+2x+2=x+3\geqslant 4$，得$x\geqslant 1$，$\therefore x\in\varnothing$；

③当$x\geqslant 1$时，$f(x)=x-1+2x+2=3x+1\geqslant 4$，得$x\geqslant 1$，

$\therefore x\in\left(-\infty,\ -\dfrac{5}{3}\right]\cup[1,\ +\infty)$. ……………………（5 分）

（2）证明：$2f(x)=2(|x-1|+|x+a|+|x+a|)\geqslant 2(|x-1-x-a|+|x+a|)=2(|a+1|+|x+a|)$

$\geqslant 2|a+1|=|2a+2|\geqslant |a+2|-|a|$. ……………………（10 分）

和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注