考生号______

班级______

姓名______

2023届普通高等学校招生全国统一考试

数学(理科)

全卷满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid |x|<3\}$,$B=\{x\mid -2<x\leqslant 1\}$,则 $A\cap B=$ ( )

A. $[0,2]$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{0,1\}$

2. 已知复数 $z=(1-2\mathrm{i})(1+b\mathrm{i})$,若 z 的共轭复数 $\bar{z}=7-\mathrm{i}$,则实数 $b=$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. -1

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_2+a_9=11$,$a_4+a_{10}=14$,则 $a_6+a_{11}=$ ( )

A. 15　　B. 16　　C. 17　　D. 25

4. 一组互不相等的样本数据:$x_1,x_2,\cdots,x_n$,$n\geqslant 3$,其平均数为 $\bar{x}$,方差为 s^2,极差为 m,中位数为 t,去掉其中的最小值和最大值后,余下数据的平均数为 $\bar{x}'$,方差为 s'^2,极差为 m',中位数为 t',则下列结论不一定正确的是 ( )

A. $\bar{x}=\bar{x}'$　　B. $s^2>s'^2$　　C. $m>m'$　　D. $t=t'$

5. 在《九章算术》中,底面为矩形的棱台被称为“刍童”.已知棱台 $ABCD-A'B'C'D'$ 是一个侧棱相等、高为1的“刍童”,其中 $AB=2A'B'=2$,$BC=2B'C'=2\sqrt{3}$,则该“刍童”外接球的体积为 ( )

A. 20π　　B. $\dfrac{20}{3}\pi$　　C. $\dfrac{20\sqrt{5}}{3}\pi$　　D. $5\sqrt{5}\pi$

6. 已知定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $\forall a,b\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$f\left(\dfrac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$,且当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)>0$,则下列说法正确的是 ( )

A. $f(x)$ 是奇函数但不是偶函数

B. $f(x)$ 是偶函数但不是奇函数

C. $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数

D. $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

7. 已知过抛物线 $C:x^2=4y$ 焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点,与圆 $x^2+y^2-2y=0$ 交于 M,N 两点,点 A,M 在 y 轴的同侧,则 $|AM|\cdot|BN|=$ ( )

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{3}$

8. 已知 x_1,x_2 分别是方程 $x+e^x=3$ 和 $x+\ln x=3$ 的根，若 $x_1+x_2=a+b$，实数 $a,b>0$，则 $\dfrac{7b^2+1}{ab}$ 的最小值为　　(　　)

A. 1　　B. $\dfrac{7}{3}$　　C. $\dfrac{67}{9}$　　D. 2

9. 设函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x(ab\neq 0,a,b\in\mathbf{R})$，若 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 恒成立，有以下结论：

①$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$；

②$f(x)$ 为奇函数；

③$f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$；

④经过点 (a,b) 的直线必与函数 $f(x)$ 的图象相交.

其中正确结论的序号是　　(　　)

A. ①④　　B. ②③　　C. ①③　　D. ②④

10. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F_1，过点 F_1 向圆 $O:x^2+y^2=a^2$ 引一条切线 l，l 与该双曲线的两条渐近线分别交于点 A,B，若 $|AB|=\sqrt{3}a$，则该双曲线的离心率为　　(　　)

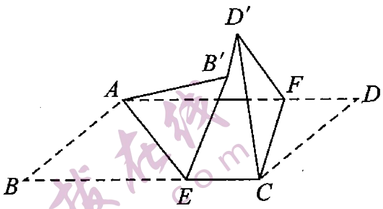
A. 2　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. 2 或 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$，当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，$f'(x)$ 为其导函数，且满足 $f'(x)<f(x)$ 恒成立，若 $0<a<1$，则 $3f(0)$，$f(a)$，$af(1)$ 三者的大小关系为　　(　　)

A. $af(1)>f(a)>3f(0)$　　B. $3f(0)>f(a)>af(1)$

C. $3f(0)>af(1)>f(a)$　　D. $f(a)>3f(0)>af(1)$

12. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=60°$，点 E,F 分别为边 BC 和 AD 上的定点，$AB=BE=2$，$BC=3$，$DF=1$，将 $\triangle ABE$，$\triangle CDF$ 分别沿着 AE,CF 向平行四边形所在平面的同一侧翻折至 $\triangle AB'E$ 与 $\triangle CD'F$ 处，连接 $B'D'$，若 $B'D'/\!/CF$，则 $B'D'=$　　(　　)



A. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}-\sqrt{11}$　　D. $2\sqrt{11}-2\sqrt{3}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，且 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$，则实数 $\lambda=$________.

14. 若 $\tan\alpha=2$，则 $2\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=$________.

15. 某单位要举办一场晚会，有两个歌唱、两个舞蹈、一个小品、一个相声共 6 个节目，要求两个歌唱不相邻演出，且两个舞蹈不相邻演出，则这 6 个节目共有________种不同的演出顺序.

16. 已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)+1(a\in\mathbf{R})$ 的图象恒过定点 A，圆 $O:x^2+y^2=4$ 上两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 满足 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AQ}(\lambda\in\mathbf{R})$，则 $|2x_1+y_1+7|+|2x_2+y_2+7|$ 的最小值为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

已知△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若$\sqrt{2}a\sin C=c\tan A$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $a=2$，D 为 BC 的中点，求线段 AD 长度的最大值.

18.（12 分）

自限性疾病是指病情具有自我缓解特点、能够自行消散的疾病.已知某种自限性疾病在不用药物的情况下一般 10 天后就可康复.为研究 A 药物对该自限性疾病的作用，某研究所对其进行了双盲实验，把 100 名初患该疾病的志愿者随机平均分成两组，甲组正常使用 A 药物，乙组用安慰剂代替用药，经统计得到以下 2×2 列联表：

	小于 10 天康复	10 天后康复	合计
甲组	30	20	50
乙组	10	40	50
合计	40	60	100

(1)依据 2×2 列联表所给数据，能否有 99%的把握认为用 A 药物与小于 10 天康复有关？

(2)若将甲组中 10 天后康复的频率视为 A 药物无效的概率，现从患该疾病且用了 A 药物的人中随机抽取 4 人，记其中 A 药物对其无效的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

双盲实验：在试验过程中，测验者与被测验者都不知道被测者所属的组别(实验组或对照组)，分析者在分析资料时，通常也不知道正在分析的资料属于哪一组，旨在消除可能出现在实验者和参与者意识当中的主观偏差和个人偏好.

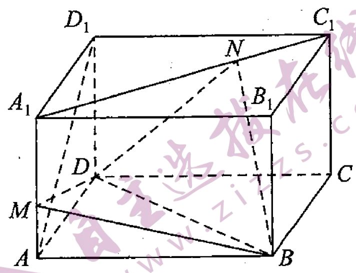
安慰剂：是指没有药物治疗作用，外形与真药相像的片、丸、针剂.

19.（12 分）

如图，在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$AA_1=\sqrt{3}AD$，M 为 AA_1 上的点，$A_1M=2AM$，$AD_1\perp BM$.

(1)证明：$BD\perp$平面 DD_1A_1A；

(2)N 为线段 A_1C_1 上的点,若 $AB=2AD$,$A_1N=2NC_1$,求二面角 $M-BD-N$ 的正弦值.



20.(12 分)

已知点 E 是圆 $F:(x+\sqrt{6})^2+y^2=32$ 上的任意一点,点 $D(\sqrt{6},0)$,线段 DE 的垂直平分线与直线 EF 交于点 C.

(1)求点 C 的轨迹方程;

(2)点 $A(2,1)$关于原点 O 的对称点为 B,与 AB 平行的直线 l 与点 C 的轨迹交于点 M,N,直线 AM 与 BN 交于点 P,试判断直线 OP 是否平分线段 MN,并说明理由.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=(ax+1)\ln x(a\in\mathbf{R})$,$f'(x)$为函数 $f(x)$的导函数.

(1)讨论函数 $f'(x)$的单调性;

(2)若 $a=1$,证明:$x(e^x+1)>f(x)+1$.

(二)选考题,共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=2+\sqrt{2}t,\\y=2+\sqrt{2}t\end{cases}$($t$ 为参数),曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos\alpha,\\y=\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),以 O 为极点,x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$.

(1)求曲线 C_1 的极坐标方程;

(2)直线 l 与曲线 C_1,C_2 分别交于不同于原点的 A,B 两点,求$|AB|$的值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{3}{a}\right|+|x-a|$,$a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq0$.

(1)若 $f(x)\geqslant4$ 恒成立,求实数 a 的取值范围;

(2)证明:$f(3)\geqslant4$.