清华大学“大中衔接”试题

1. 设指数α_1, $\cdots$, α_n两两不同，系数a_1, $\cdots$, a_n不全为零，证明：$f(x)=a_1x^{\alpha_1}+\cdots+a_nx^{\alpha_n}$在$(0,+\infty)$上至多$n-1$个零点

2. 设f：$[-1,1]\to R$是连续函数，证明：

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\int_{-1}^{1}\frac{|\lambda|}{\lambda^2+x^2}f(x)dx\right)=\pi f(0)$$

证明：由于$\int_{-1}^{1}\frac{|\lambda|}{\lambda^2+x^2}f(x)dx$是$\lambda$的偶函数，只需证明右极限版本

3. 设整数$n>1$，证明：至多只有有限个正整数a，使得方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=ax_1x_2\cdots x_n$$

有非零整数解

4. 设A,B,C,D是单位球面S上三个不同点且都位于第一象限中，对于任何两个不同的点$P,Q\in S$，只要PQ不是S的直径，则平面OPQ与S的交集是S上的一个圆周，P,Q将此圆周分成两段弧，将其中较短的那段弧记为$\overset{\frown}{PQ}$，设弧$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$，$\overset{\frown}{AB}$的中点分别为D,E,F，证明：弧$\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BE}$, $\overset{\frown}{CF}$经过同一个点

5. 设共有$k\geq 4$个不同的字母，可用它们构成单词，给定一族（记为T）禁用单词，其中任何两个禁用单词长度不等，称一个单词是可用的，如果它不含有连续一段字母恰为某禁用单词，证明：至少有$\left(\frac{k+\sqrt{k^2-4k}}{2}\right)^n$个长为$n$的可用单词

6. 设n,p是正整数，集合A_1, $\cdots$, A_k是$\{1,2,\cdots,n\}$的子集，满足对任何$i\neq j$都有$|A_i\setminus A_j|\geq p$，证明：

$$k\leq\frac{(p-1)!\cdot n!}{\left(\left\lfloor\frac{n+p-1}{2}\right\rfloor\right)!\cdot\left(\left\lceil\frac{n+p-1}{2}\right\rceil\right)!}$$

1. 设指数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 两两不同，系数 $a_1, \cdots, a_n$ 不全为零，证明：$f(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_n x^{\alpha_n}$ 在 $(0, +\infty)$ 上至多 $n-1$ 个零点。

证明：

不妨设每个系数 a_i 都不为零，否则可化归为 n 更小的情形。在此情形下，用反证法，假设 $f(x) = 0$ 有 n 个零点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$，注意到

$$f(x) = 0 \iff a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x^{\alpha_i - \alpha_1} = 0,$$

记 $g(x) = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x^{\alpha_i - \alpha_1}$，则有 $g(x_1) = g(x_2) = \cdots = g(x_n) = 0$。

对每个 $1 \le i \le n-1$，在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上对可导函数 $g(x)$ 使用罗尔 (Rolle) 定理，可知存在 $y_i \in (x_i, x_{i+1})$ 使得 $g'(y_i) = 0$。这样，$g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 $n-1$ 个零点，而

$$g'(x) = \sum_{i=2}^{n} a_i(\alpha_i - \alpha_1) x^{\alpha_i - \alpha_1 - 1},$$

是 $n-1$ 项的和，且其系数都不为零，利用归纳假设可得 $g'(x)$ 至多 $(n-1)-1$ 个零点，矛盾！

2. 设 $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ 是连续函数，证明：

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\int_{-1}^{1} \frac{|\lambda|}{\lambda^2 + x^2} f(x)\, dx \right) = \pi f(0).$$

证明：

由于 $\int_{-1}^{1} \frac{|\lambda|}{\lambda^2+x^2} f(x)\, dx$ 是 λ 的偶函数，只需证明右极限版本

$$\lim_{\lambda \to 0+} \left(\int_{-1}^{1} \frac{|\lambda|}{\lambda^2 + x^2} f(x)\, dx \right) = \pi f(0).$$

要用到如下积分，对实数 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$，用积分的换元公式可得

$$\int_{\lambda \tan \alpha}^{\lambda \tan \beta} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\lambda \tan \theta)^2} d(\lambda \tan \theta) = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta = \beta - \alpha.$$

对于正数 $\lambda<1$，记 $\theta(\lambda)=\arctan\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}$. 令

$$A=\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}\frac{|\lambda|}{\lambda^2+x^2}f(x)\,dx,$$

$$B=\int_{-1}^{-\sqrt{\lambda}}\frac{|\lambda|}{\lambda^2+x^2}f(x)\,dx+\int_{\sqrt{\lambda}}^{1}\frac{|\lambda|}{\lambda^2+x^2}f(x)\,dx.$$

先考虑积分 A. 利用积分中值定理，存在 $x_*(\lambda)\in[-\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda}]$，使得

$$A=f(x_*(\lambda))\cdot\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}\frac{|\lambda|}{\lambda^2+x^2}dx=2\theta(\lambda)\cdot f(x_*(\lambda)).$$

再估计 B. 由最值定理（或有界性定理），连续函数 f 在有界闭区间 $[-1,1]$ 上有界，设 $|f(x)|\le M,\forall x\in[-1,1]$. 由此可得

$$|B|\le 2M\int_{\sqrt{\lambda}}^{1}\frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}dx=2M(\arctan\frac{1}{\lambda}-\arctan\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda})\le 2M(\frac{\pi}{2}-\theta(\lambda)).$$

结合起来，可得

$$2\theta(\lambda)\cdot f(x_*)-2M(\frac{\pi}{2}-\theta(\lambda))\le A+B\le 2\theta(\lambda)\cdot f(x_*)+2M(\frac{\pi}{2}-\theta(\lambda)).\quad(1)$$

注意到，$x_*(\lambda)\in[-\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda}]$，由 f 连续可知 $\lim\limits_{\lambda\to0+}f(x_*(\lambda))=f(0)$. 结合 $\lim\limits_{\lambda\to0+}\theta(\lambda)=\frac{\pi}{2}$ 可知 (1) 式上下界有相同的极限 $\pi\cdot f(0)$，利用夹逼定理即得 $\lim\limits_{\lambda\to0+}(A+B)=\pi\cdot f(0)$. □

3. 设整数 $n>1$. 证明：至多只有有限多个正整数 a, 使得方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=ax_1x_2\cdots x_n,$$

有非零整数解.

证明:

我们断言当 $a>n$ 时，题述方程只有零解.

用反证法. 假设 $a>n$ 且 $(x_1,\cdots,x_n)$ 是非零解，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2>0$, 故每个 x_i 都不等于零，且有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2=a\prod_{i=1}^{n}x_i=a\prod_{i=1}^{n}|x_i|,$$

这表明原方程有正整数解 $(|x_1|,\cdots,|x_n|)$.

考虑该方程的最小正整数解，即使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 最小的正整数解. 不妨设 $x_1\le\cdots\le x_n$. 考虑有关 t 的二次方程

$$t^2-(ax_1\cdots x_{n-1})t+(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)=0,$$

记上式左边的函数为 $f(t)$. 显然 $t=x_n$ 是它的解，设另一个解为 y. 注意到

$$f(x_{n-1})=x_{n-1}^2-(ax_1\cdots x_{n-2})x_{n-1}^2+(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)\le(n-a)x_{n-1}^2<0.$$

这说明 x_{n-1} 严格介于 $f(t)$ 的两根之间. 由于已有 $x_{n-1}\le x_n$, 则 $y<x_{n-1}<x_n$.

由韦达定理有

$$\begin{cases} x_n + y = a x_1 \cdots x_{n-1}, \\ x_n \cdot y = x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2. \end{cases}$$

前一个式子表明 $y \in \mathbb{Z}$，后一个式子表明 $y > 0$，即 y 是正整数。这样，y 是严格小于 x_n 的正整数，从而找到题述方程的更小正整数解 $(x_1, \cdots, x_{n-1}, y)$，矛盾！ □

4. 设 A, B, C 是单位球面 S 上三个不同点且都位于第一象限中。对于任何两个不同点 $P, Q \in S$，只要 PQ 不是 S 的直径，则平面 OPQ 与 S 的交集是 S 上的一个圆周，P, Q 将此圆周分成两段弧，将其中较短的那段弧记为 $\overset{\frown}{PQ}$。设弧 $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$ 的中点分别为 D, E, F。证明：弧 $\overset{\frown}{AD}, \overset{\frown}{BE}, \overset{\frown}{CF}$ 经过同一个点。

证明:

设坐标原点为 O，对于任何一点 $X \neq O$，将射线 OX 与 S 的交点记为 $T(X)$，称为 X(向球面) 的投影点。如果用三维向量 $\mathbf{x} = \vec{OX}$ 表示 X，则 $T(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$，其中 $|\mathbf{x}|$ 表示向量 $\mathbf{x}$ 的长度。

在平面 OPQ 上看，弧 $\overset{\frown}{PQ}$ 等于线段 PQ 的投影，即有

$$\overset{\frown}{PQ} = \{T(R) | R \in PQ\}.$$

设 P, Q 代表的向量为 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$，则 $PQ = \{\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q} | 0 \le \lambda \le 1\}$，由此可得

$$\overset{\frown}{PQ} = \{T(\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q}) | 0 \le \lambda \le 1\}.$$

特别的，$\overset{\frown}{PQ}$ 的中点为 $T(\frac{\mathbf{p}+\mathbf{q}}{2})$。

设 A,B,C,D,E,F 代表的向量分别为 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e},\mathbf{f}$，则有

$$\mathbf{d}=T(\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2})=\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{|\mathbf{b}+\mathbf{c}|},\quad \mathbf{e},\mathbf{f}\text{ 相应的轮换得到.}$$

我们断言：$T(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3})\in\widehat{AD}\cap\widehat{BE}\cap\widehat{CF}$，由此可得弧 $\widehat{AD},\widehat{BE},\widehat{CF}$ 共点．由对称性，只需验证 $T(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3})\in\widehat{AD}$．为此，令 $\lambda=\frac{1}{1+|\mathbf{b}+\mathbf{c}|}\in[0,1]$，则有 $T(\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{d})\in\widehat{AD}$．直接计算可得

$$\begin{aligned}T(\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{d})&=T(\frac{1}{1+|\mathbf{b}+\mathbf{c}|}\cdot\mathbf{a}+\frac{|\mathbf{b}+\mathbf{c}|}{1+|\mathbf{b}+\mathbf{c}|}\cdot\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{|\mathbf{b}+\mathbf{c}|})\\&=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|}=T(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}),\end{aligned}$$

这就完成了断言的证明．

5．设共有 $k\geq 4$ 个不同的字母，可用它们构成单词．给定一族（记为 T）禁用单词，其中任何两个禁用单词长度不等．称一个单词是可用的，如果它不含连续一段字母恰为某禁用单词．证明：至少有 $(\frac{k+\sqrt{k^2-4k}}{2})^n$ 个长为 n 的可用单词．

证明：

设字母集为 A，长度为 n 的可用单词所构成的集合为 G_n，其元素个数为 g_n，约定 $g_0=1$（空单词是可用的）．记 $c=\frac{k+\sqrt{k^2-4k}}{2}$，我们来证明 $g_n\geq cg_{n-1}$，由此即得 $g_n\geq c^n$．

用归纳法．显然有 $g_1 \geq k-1 > c$．假设 $n < m$ 时都有 $g_n \geq c g_{n-1}$，来考虑 $n = m \geq 2$ 的情形．令 $X = \{wa | w \in G_{m-1}, a \in A\}$，如果 X 中的成员 wa 不可用，则其中有连续的一段为 T 中某个单词，由于 w 可用，w 中不含连续一段是 T 中的单词，所以一定是 wa 中以 a 结尾的连续一段是 T 中的某个单词，即 wa 形如

$$wa = vt, \quad t \in T, \quad v \in G_{m-|t|},$$

这里 $|t|$ 表示单词 t 的长度．这样，如下的集合

$$Y = X \backslash \left(\bigcup_{t \in T, |t| \leq m} \{vt | v \in G_{m-|t|}\} \right)$$

包含在 G_m 中．由此可得

$$g_m \geq |X| - \sum_{t \in T, |t| \leq m} \#\{vt | v \in G_{m-|t|}\} = g_{m-1} \cdot k - \sum_{t \in T, |t| \leq m} g_{m-|t|}.$$

由条件 T 中的单词长度两两不同，可进一步得到

$$g_m \geq g_{m-1} \cdot k - (g_{m-1} + \cdots + g_0). \tag{2}$$

利用归纳假设，对每个 $i \leq m-1$，有 $g_{m-1} \geq c^{m-1-i} g_i$，即有 $g_i \leq \frac{1}{c^{m-1-i}} g_{m-1}$，代入 (2) 式可得

$$g_m \geq g_{m-1} \cdot \left(k - (1 + \frac{1}{c} + \cdots + \frac{1}{c^{m-1}} \right) \geq g_{m-1} \cdot (k - \frac{1}{1-\frac{1}{c}}) = c \cdot g_{m-1},$$

最后是注意到 $c = \frac{k+\sqrt{k^2-4k}}{2}$ 满足 $k = \frac{c^2}{c-1}$，则有 $k - \frac{1}{1-\frac{1}{c}} = c$．这就完成了整个归纳证明．□

6. 设 n,p 是正整数，集合 $A_1,\cdots,A_k$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集，满足对任何 $i\neq j$ 都有 $|A_i\backslash A_j|\geq p$. 证明：

$$k\leq\frac{(p-1)!\cdot n!}{(\lfloor\frac{n+p-1}{2}\rfloor)!\cdot(\lceil\frac{n+p-1}{2}\rceil)!}.$$

对每个 $1\leq i\leq k$, 令

$$\mathcal{P}_i=\{\sigma\in S_n|\text{存在}|T|\leq p-1,\ \text{使得}\sigma\text{的前}a_i+|T|\text{个元素构成}A_i\cup T\}.$$

我们断言对 $i\neq j$, $\mathcal{P}_i$ 与 $\mathcal{P}_j$ 不相交. 否则的话，设 $\sigma\in\mathcal{P}_i\cap\mathcal{P}_j$, 则依定义存在集合 T_i,T_j 满足 $|T_i|\leq p-1,|T_j|\leq p-1$, 且 σ 的前面 $a_i+|T_i|$ 个元素构成 $A_i\cup T_i$, σ 的前面 $a_j+|T_j|$ 个元素构成 $A_j\cup T_j$. 不妨设 $a_i+|T_i|\leq a_j+|T_j|$, 则有 $A_i\cup T_i\subset A_j\cup T_j$. 由此可得 $A_i\subset A_j\cup T_j$, $A_i\backslash A_j\subset T_j$, 这与 $|A_i\backslash A_j|\geq p$, $|T_j|\leq p-1$ 矛盾!

由上述断言，可得 $n!\geq\sum_{i=1}^{k}|\mathcal{P}_i|$. 注意到，$\sigma\in\mathcal{P}_i$ 的充分必要条件是 A_i 的每个元素都出现在 σ 的前面 $a_i+(p-1)$ 个元素之中，由此可得

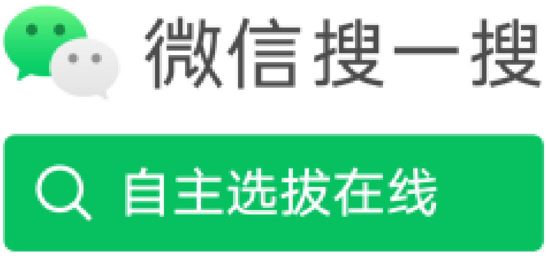
$$|\mathcal{P}_i|=C_{a_i+p-1}^{a_i}\cdot(a_i)!\cdot(n-a_i)!=\frac{(n+p-1)!}{(p-1)!\cdot C_{n+p-1}^{a_i+p-1}}\geq\frac{(n+p-1)!}{(p-1)!\cdot C_{n+p-1}^{\lfloor\frac{n+p-1}{2}\rfloor}},$$

代入 $n!\geq\sum_{i=1}^{k}|\mathcal{P}_i|$ 即得所要证明的不等式. □

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》