江淮十校2022届高三第一次联考

数学(理科)试题参考答案与评分细则

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	C	A	B	A	C	A	B	B	D	A	D	C

1. C

2. A　解析:$2iz=2+3i\to z=\frac{2+3i}{2i}=\frac{3}{2}-i$,故选A.

3. B　解析:$y=f\left(x-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{1+2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+1=\frac{2-2x}{2x}+1=\frac{1}{x}$为奇函数,故选B.

4. A　解析:$a=\sin x,x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5}{6}\pi\right]$有2个零点,借助图像得$a\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,$\therefore P=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,故选A.

5. C　解析:对于A,$y=f(x)+g(x)=e^{|x|}+\sin x$为非奇非偶函数,与函数图象不符,排除A;对于B,$y=f(x)-g(x)=e^{|x|}-\sin x$为非奇非偶函数,与函数图象不符,排除B;对于D,$y=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sin x}{e^{|x|}}$,当$x=2$时,$0<y<1$,与图象不符,排除D、故选C.

6. A　解析:$c=2^{\frac{\sqrt{3}}{3}}>2^0=1$,$0<a=\log_2\frac{\sqrt{6}}{2}<\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}=\log_3\sqrt{3}<\log_3\frac{\sqrt{14}}{2}=b<1$,$\therefore a<b<c$,故选A.

7. B　解析:大老鼠每天打洞的距离成首项为1,公比为2的等比数列,小老鼠每天打洞的距离成首项为1,公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

$\therefore$距离之和为$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2^n-\frac{1}{2^{n-1}}+1$.

$\because S_4=16\frac{7}{8}<20$,$S_5=32\frac{15}{16}>20$

$\therefore$这两只老鼠相逢所需天数至少为5天.故选B.

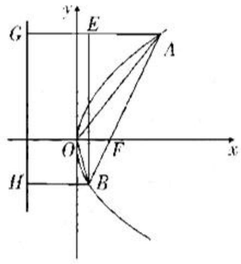
8. B　解析:因为$\left(\frac{x^2}{y}+y\right)(x+y)^6=\frac{x^2}{y}\cdot(x+y)^6+y\cdot(x+y)^6$,所以$x^2y^5$的系数为$(x+y)^6$展开式中$y^6$,$x^2y^4$的系数之和,由于$T_{r+1}=C_6^rx^{6-r}y^r$,$(r=0,1,2,\cdots,6)$,所以$x^2y^5$的系数为$C_6^6+C_6^4=16$,故选B.

9. D　解析:因为轴截面为顶角是$\frac{2\pi}{3}$的等腰三角形,故当截面为顶角是$\frac{\pi}{2}$的等腰三角形时面积最大,

此时$S=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\sin\frac{\pi}{2}=2$,故选D.

10. A　解析：$\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha=\sqrt{2}$ 两边平方可得 $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha+2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha=2$，所以 $\cos^2\alpha+2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha+2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha=1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，所以 $2\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha=\sin^2\alpha$。因为 $\sin\alpha>0$，所以 $2\sqrt{2}\cos\alpha=\sin\alpha$，$\tan\alpha=2\sqrt{2}$，故选 A.

11. D　解析：抛物线的准线方程 $l:x=-\frac{p}{2}$，如图所示，



作 $AG\perp l$ 于 G，作 $BH\perp l$ 于 H，作 $BE\perp AG$ 于 E，

设 $BF=t$，因为 $BH=t$，$AG=3t$，所以 $AE=2t$，

故 $k_{AB}=\sqrt{3}$，所以直线 AB 的方程 $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

因为 $|AB|=\frac{\sqrt{3}}{3}S=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}|AB|d$，所以 $d=2\sqrt{3}$，解得 $p=8$，故选 D.

12. C　解析：$(1-k)x+x+\ln x-e^{(k-1)x}\leqslant 0\Rightarrow x+\ln x\leqslant (k-1)x+e^{(k-1)x}$

构造函数 $f(x)=x+\ln x$，易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增.

$\therefore f(x)\leqslant f(e^{(k-1)x})\Rightarrow x\leqslant e^{(k-1)x}$，

两边取对数得 $\ln x\leqslant (k-1)x\Rightarrow k-1\geqslant\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，易求出 $g(x)_{\max}=\frac{1}{e}$.

$\therefore k-1\geqslant\frac{1}{e}\Rightarrow k\geqslant 1+\frac{1}{e}$，故选 C.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 19

解析：根据不等式组表示的平面区域，将初始直线 $l_0:x+5y=0$ 向上平移经过点 $\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$ 时，z 取得最大值 19.

14. -1

解析：$\vec{a}-k\vec{b}=(2-5k,-1-3k)$，$\vec{a}+\vec{b}=(7,2)$，于是 $2(2-5k)+7(1+3k)=0$，解得 $k=-1$.

15. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

解析：不妨设双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x$，圆 $E:x^2+y^2-2x=0$ 的标准方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，故 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

16. $[\sqrt{4+2\sqrt{2}},2\sqrt{2}]$

解：不妨令点 P 在棱 A_1B_1 上，设 $PA_1=x$，则 $PB_1=1-x$，由勾股定理可得

$|PD|+|PB|=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{(1-x)^2+1}=\sqrt{(x-0)^2+(0-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(x-1)^2+(0-1)^2}$，

其几何意义为 x 轴上一动点 $M(x,0)(0\leqslant x\leqslant 1)$ 到两定点 $S(0,\sqrt{2})$ 与 $T(1,1)$ 的距离之和. 易知其最小值即为 $S'(0,-\sqrt{2})$ 到 $T(1,1)$ 的距离，

即 $(|PB|+|PD|)_{\min}=|S'T|=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

又由平面几何知识知，$|PB|+|PD|$ 的最大值在 $x=0$ 或 $x=1$ 处取得，

当 $x=0$ 时，$|PB|+|PD|=2\sqrt{2}$；当 $x=1$ 时，$|PB|+|PD|=\sqrt{3}+1<2\sqrt{2}$.

故 $|PB|+|PD|$ 的取值范围为 $[\sqrt{4+2\sqrt{2}},2\sqrt{2}]$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：(1) 由正弦定理得 $(b+c)b+c^2=a^2$，即 $b^2+c^2-a^2=-bc$， ………… 2 分

$\therefore$ 由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，因为 $A\subset(0,\pi)$，

所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$. ………… 4 分

(2) 因为 $B+C=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\sin^2B+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}-B\right)=\dfrac{1-\cos2B}{2}+\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi-2B\right)}{2}=1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cos2B+\right.$

$\left.\dfrac{\sqrt3}{2}\sin 2B\right)=1-\dfrac{1}{2}\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)$， ………… 8 分

因为 $B\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，所以 $1-\dfrac{1}{2}\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}$，当且仅当 $B=\dfrac{\pi}{6}$ 时等号成立，

所以 $\sin^2B+\sin^2C$ 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$. ………… 10 分

18. 解：(1) 记甲答题时第 i 道题答对为事件 $A_i(i=1,2,3,\cdots,10)$，

则事件 A_1,A_2,A_3,A_4 是相互独立事件， ………… 1 分

记甲答题开始后，直到第 4 道题才答对为事件 A，则 $A=A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4$， ………… 2 分

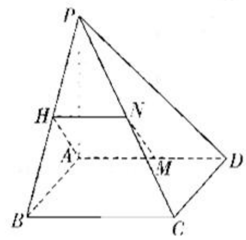
所以 $P(A)=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})\cdot P(A_4)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^3\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{625}$； ………… 5 分

(2) 记甲答对的题数为随机变量 X，总得分为随机变量 Y，则 $X\sim B\left(10,\dfrac{4}{5}\right)$， ………… 7 分

所以 $E(X)=10\times\dfrac{4}{5}=8$，$Y=10X-5(10-X)=15X-50$， ………… 9 分

于是 $E(Y)=E(15X-50)=15E(X)-50=70$，

所以甲得分的期望是 70 分. ………… 12 分



19. 解：(1) 取 PB 中点 H，则 $HN/\!/BC$，$HN=\dfrac{1}{2}BC$， ………… 2 分

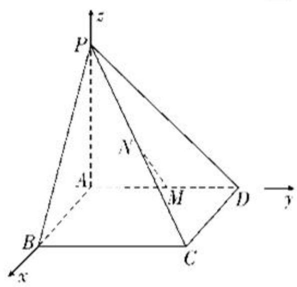
又 $AM/\!/BC$，$AM=\dfrac{1}{2}BC$，$\therefore HN/\!/AM$，$HN=AM$. 于是 $HNMA$ 为平行四边形.

则 $MN/\!/AH$，又 $MN\not\subset$ 平面 PAB，$AH\subseteq$ 平面 PAB，$\therefore MN/\!/$ 平面 PAB. …… 5 分

（注：其它方法酌情给分！）

(2) 以 AB,AD,AP 为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，则

$\overrightarrow{PB}=(2,0,-4)$，$\overrightarrow{PC}=(2,3,-4)$，$\overrightarrow{PD}=(0,3,-4)$. ………… 7 分



设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n_1}=(x,y,z)$，从而

$\begin{cases}2x-4z=0\\2x+3y-4z=0\end{cases}$，取 $\vec{n_1}=(2,0,1)$，

同理平面 PCD 的法向量为 $\vec{n_2}=(0,4,3)$， ………… 9 分

设平面 PBC 与平面 PCD 所成锐二面角大小为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle|=\dfrac{3}{5\sqrt5}=\dfrac{3}{25}\sqrt5$. ………… 12 分

20. 解：(1) 由题意得 $\begin{cases}2S_n=na_1+na_n\\2S_{n-1}=(n-1)a_1+(n-1)a_{n-1}\end{cases}$ $(n\geq 2)$

两式相减得 $(n-2)a_n+a_1=(n-1)a_{n-1}$ …………………… 2 分

从而 $\begin{cases}(n-2)a_n+a_1=(n-1)a_{n-1}\\(n-1)a_{n+1}+a_1=na_n\end{cases}$ …………………… 4 分

再两式相减得 $(n-1)a_{n+1}+(n-1)a_{n-1}=(2n-2)a_n$

又 $n-1\neq 0$

$\therefore a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n$，于是 $\{a_n\}$ 为等差数列. …………………… 6 分

（注：其它方法酌情给分！）

(2) 由 (1) 可得 $\{a_n\}$ 为等差数列，又 $a_1=d=1$，$\therefore a_n=n$. …………………… 8 分

于是 $\dfrac{2^{a_n}}{(2^{a_n}-1)(2^{a_{n+1}}-1)}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$ …………………… 10 分

则 $T_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2-1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)$

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$. …………………… 12 分

21. 解：(1) 由题意得 $a=2$. …………………… 1 分

设 PF_1，PF_2 长分别为 p，q. 则

$\cos\theta=\dfrac{p^2+q^2-4c^2}{2pq}=\dfrac{(p+q)^2-4c^2-2pq}{2pq}$

$=\dfrac{2b^2-pq}{pq}=\dfrac{2b^2}{pq}-1\geq\dfrac{2b^2}{\left(\dfrac{p+q}{2}\right)^2}-1=\dfrac{2b^2}{a^2}-1$，

（当且仅当 $p=q$ 时取等号）

从而 $\dfrac{2b^2}{a^2}-1=\dfrac{1}{2}$，得 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}$，$\therefore a^2=4$，$b^2=3$.

则椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …………………… 5 分

（注：其它方法酌情给分！）

(2) ①若直线 l 的斜率不存在，易得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=-3$； …………………… 6 分

②若直线 l 的斜率存在，设其方程为 $y=kx+m$，联立 $\begin{cases}y=kx+m\\\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得

$(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，易知 $\Delta>0$ 恒成立， …………………… 7 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $N\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，

且 $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}$，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2-m\cdot\dfrac{y_1+y_2}{2}$

$=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)-\frac{m}{2}(kx_1+m+kx_2+m)$

$=(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2-\frac{km}{2}(x_1+x_2)-m^2$ ………………………… 9 分

$=(k^2+1)x_1x_2+\frac{km}{2}(x_1+x_2)=(k^2+1)\frac{4m^2-12}{4k^2+3}+\frac{km}{2}\cdot\frac{-8km}{4k^2+3}$

$=\frac{-12k^2+4m^2-12}{4k^2+3}=\frac{-3(4k^2+3)+4m^2-3}{4k^2+3}=-3+\frac{4m^2-3}{4k^2+3}$

要使上式为常数,必须且只需$4m^2-3=0$,即$m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$,

此时$\vec{OA}\cdot\vec{OB}-\vec{OM}\cdot\vec{ON}=-3$为定值,符合题意. ………………………… 11 分

综上可知,当$m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$时,能使得$\vec{OA}\cdot\vec{OB}-\vec{OM}\cdot\vec{ON}=-3$. ………………………… 12 分

22. 解:(1)$f'(x)=(x+2)e^x$,所以$k=f'(1)=3e$,$f(1)=2e$,

所以切线方程为:$3ex-y-e=0$; ………………………… 3 分

(2)$g(x)=(x+1)e^x+ax^2+4ax$.

所以$g'(x)=(x+2)e^x+2ax+4a=(x+2)(e^x+2a)$ ………………………… 4 分

①当$a>0$时,$e^x+2a>0$,当$x\in(-\infty,-2)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$递减,

当$x\in(-2,+\infty)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$递增,

因为$g(-2)=-e^{-2}-4a<0$,$g(0)=1>0$, ………………………… 6 分

又因为当$x<-2$时,$x+1<0$,$e^x<1$,

所以$(x+1)e^x>x+1$,

所以$(x+1)e^x+ax^2+4ax>ax^2+(4a+1)x+1$,

令$ax^2+(4a+1)x+1>0$,解得$x<\frac{-4a-1-\sqrt{16a^2+4a+1}}{2a}$,

故取$b=\frac{-4a-1-\sqrt{16a^2+4a+1}}{2a}<-2$,则$g(b)>0$,

所以存在$x_1\in(b,-2)$,$x_2\in(-2,0)$使得$g(x_1)=g(x_2)=0$,有两个零点; ………………………… 7 分

②当$a=0$时,$g(x)=(x+1)e^x$,有一个零点$x=-1$; ………………………… 8 分

③当$-\frac{1}{2e^3}<a<0$时,$\ln(-2a)<-3$,令$g'(x)=0$,解得$x=-2$或$\ln(-2a)$,

所以当$x\in(-\infty,\ln(-2a))$时,$g'(x)>0$,$g(x)$递增,

当$(\ln(-2a),-2)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$递减,

当$x\in(-2,+\infty)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$递增,

因为$g(\ln(-2a))=a(-2+2\ln(-2a)+\ln^2(-2a))$,令$\ln(-2a)=t<-3$

又因为当$t<-3$时$t^2+2t-2>0$,

所以$g(\ln(-2a))<0$, ………………………… 10 分

又$g(0)=1>0$,存在$x_0\in(-2,0)$使$g(x_0)=0$有一个零点.

综上:当$-\frac{1}{2e^3}<a\leq 0$时,有一个零点;当$a>0$时,有两个零点. ………………………… 12 分