高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{(x,y)|x+y=1\}$ 和 $B=\{(x,y)|y=1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1\}$　　B. $\{0\}$　　C. $\{(1,0)\}$　　D. $\{(0,1)\}$

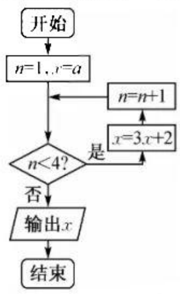
2. 已知复数 $z=\frac{2+5i}{i}$（i 为虚数单位），则复数 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=1$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的大小等于

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 120°

4. 某程序框图如图所示，若 $a=2$，则该程序运行后，输出 x 的值为

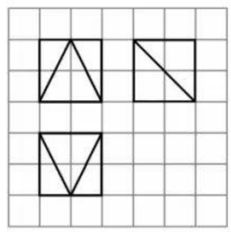


A. 8　　B. 26　　C. 80　　D. 242

5. 在公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1,a_2,a_{k_1},a_{k_2},a_{k_3}$ 成公比为 4 的等比数列，则 $k_3=$

A. 84　　B. 86　　C. 88　　D. 96

6. 如图是某几何体的三视图，图中小方格的边长为 1，则该几何体的体积为



A. $\frac{22}{3}$

B. $\frac{20}{3}$

C. 6

D. $\frac{17}{3}$

7. 碳-14测年法是由美国科学家马丁·卡门与同事塞缪尔·鲁宾于1940年发现的一种测定含碳物质年龄的方法，在考古中有大量的应用. 其原理为：宇宙射线中的中子与氮-14反应产生碳-14，而碳-14会发生衰变变成氮-14，由此构建一个核素平衡. 空气中的碳-14与氧反应生成的二氧化碳被生物圈接收，活体生物体内的碳-14和碳-12浓度比例是一定的，只有当生物死亡后，碳循环中断，碳-14会衰变并逐渐消失. 放射性元素的衰变满足规律 $N=N_0e^{-\lambda t}$（表示的是放射性元素在生物体中最初的含量 N_0 与经过时间 t 后的含量 N 间的关系，其中 $\lambda=\frac{\ln 2}{T}$（T 为半衰期））. 已知碳-14的半衰期为5 730年，$N_0=1.2\times10^{-12}$，经测量某地出土的生物化石中碳-14含量为 4×10^{-13}，据此推测该化石活体生物生活的年代距今约（结果保留整数，参考数据 $\log_2 3\approx1.585$）

A. 7 650年　　B. 8 890年　　C. 9 082年　　D. 10 098年

8. 给出下列四种图象的变换方法：

①将图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度；②将图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度；

③将图象向左平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度；④将图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度.

利用上述变换中的某些方法，能由函数 $y=\sin 4x$ 的图象得到函数 $y=-2\sin 2x\cos 2x$ 的图象的变换方法是

A. ①②　　B. ②③　　C. ①④　　D. ③④

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数，对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)=f(x)f(y)$ 恒成立，若 $f(-5)=3$，则 $f(3-x)<27$ 的解集为

A. $(-\infty,15)$　　B. $(-\infty,18)$　　C. $(15,+\infty)$　　D. $(18,+\infty)$

10. 人利用双耳可以判定声源在什么方位，听觉的这种特性叫做双耳定位效应（简称双耳效应）. 根据双耳的时差，可以确定声源 P 必在以双耳为左右焦点的一条双曲线上. 又若声源 P 所在的双曲线与它的渐近线趋近，此时声源 P 对于测听者的方向偏角 α，就近似地由双曲线的渐近线与虚轴所在直线的夹角来确定. 一般地，甲测听者的左右两耳相距约为20 cm，声源 P 的声波传及甲的左、右两耳的时间差为 3×10^{-5} s，声速为334 m/s，则声源 P 对于甲的方向偏角 α 的正弦值约为

A. 0.004　　B. 0.04　　C. 0.005　　D. 0.05

11. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AC\perp CB$，其外接球的体积为 36π，若 $AC=x$，$BC=y$，$AP=z$，则 $xy+yz+zx$ 的最大值为

A. 36　　B. 32　　C. 24　　D. 12

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x\geqslant1,\\ x-1, x<1,\end{cases}$ 则满足 $f(-x)-f(x-1)>-1$ 的 x 的取值范围是

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,2)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 某学校高一有男生1 560人，女生1 248人，用分层抽样的方法从该年级全体学生中抽取一个容量为18的样本，则此样本中女生的人数为________.

14. 函数 $f(x)=x\ln x$ 的图象在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程为________.

15. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-4\leqslant0,\\ x-y-1\geqslant0,\\ 2x-6y-3\leqslant0,\end{cases}$ 则 $z=2x+3y$ 的最大值为________.

16. 已知抛物线 $C:x^2=\frac{1}{3}y$ 的焦点为 F，过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点，则 $\frac{|AB|}{|AF|\cdot|BF|}=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，角 A 为锐角且 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（1）求 $\tan\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$；

（2）若 $\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$c=2\sqrt{2}$，求 b.

18.（本小题满分 12 分）

今年的疫情对餐饮业影响巨大，为了加快恢复疫情过后餐饮业的经济，各地相继派发各种优惠券，以刺激餐饮消费. 11 月份，某餐厅随机调查了 80 名顾客到该餐厅消费的情况，整理数据得到下表：

消费金额（元）	[0,30)	[30,60)	[60,90)	[90,120)	[120,150)
人数	10	30	20	10	10

（1）估计 11 月份顾客到该餐厅就餐消费不少于 60 元的概率；

（2）估计 11 月份顾客到该餐厅就餐消费金额的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

（3）完成下面的 2×2 列联表，并判断能否有 99%的把握认为就餐消费的金额与性别有关？

	不少于 90 元	少于 90 元	总计
男性	11	22	
女性			
总计			

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

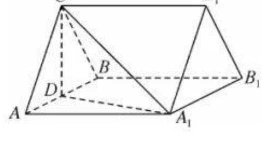
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.01	0.005	0.001
k_0	6.635	7.879	10.828

19.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB$，$CD\perp AB$，$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60°$.

（1）求证：平面 $ABC\perp$平面 A_1CD；

（2）若平面 $ABC\perp$平面 AA_1B_1B，$AB=CB=2$，求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积.



20.（本小题满分 12 分）

已知 F_1，F_2 分别是椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，A，C 分别是椭圆 E 的左、右顶点，D，B 分别是椭圆 E 的上、下顶点，若四边形 $ABCD$ 的面积为 $2\sqrt{2}$，$\triangle DF_1F_2$ 的面积为 1.

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)设平行于 AB 的动直线 l 与四边形 $ABCD$ 的对边 AD，BC 分别交于点 M，N，与椭圆交于点 P，Q（在直线 l 上从上到下顺次分别为 P，M，N，Q），求证：$|PM|=|NQ|$.

21.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=xe^x-x$，$g(x)=\ln x+1$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)证明：不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）**选修 4－4：坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=4-t,\\ y=\frac{t}{3}\end{cases}$（$t$ 为参数）；以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，且曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

(1)求曲线 C_1 的普通方程及 C_2 的直角坐标方程；

(2)设曲线 C_1 与曲线 C_2 交于 A，B 两点，点 $P(4,0)$，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4－5：不等式选讲**

已知函数 $f(x)=|2x-5|+|2x+1|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant 10$ 的解集；

(2)若 $-x^2+2x-1+a\leqslant f(x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　解方程组$\begin{cases}y=1,\\x+y=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$所以$A\cap B=\{(0,1)\}$. 故选 D.

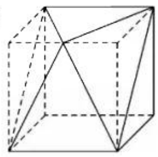
2. D　因为$z=\frac{2+5\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{2}{\mathrm{i}}+5=5+\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=5+\frac{2\mathrm{i}}{-1}=5-2\mathrm{i}$,所以复数$z$在复平面内对应的点位于第四象限. 故选 D.

3. A　由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=1$,得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+(\sqrt{2})^2=3$,所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$夹角的大小为$30^\circ$. 故选 A.

4. C　首先,$n=1,x=2$,第一次循环,$x=8,n=2$;第二次循环,$x=26,n=3$;第三次循环,$x=80,n=4$;结束循环,输出$x=80$. 故选 C.

5. B　设等差数列$\{a_n\}$的公差为d. 因为$a_1,a_2,a_{k_1},a_{k_2},a_{k_3}$成公比为 4 的等比数列,所以$a_2=4a_1$,所以$a_1+d=4a_1$,得$d=3a_1$. 所以$a_{k_3}=4^4a_1=256a_1$,所以$a_1+(k_3-1)d=256a_1$. 即$(k_3-1)\cdot 3a_1=255a_1$,解得$k_3=86$. 故选 B.

6. B　由三视图知该几何体为正方体截去了两个相同的三棱锥(如图),所以该几何体的体积为$2\times2\times2-2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times2=8-\frac{4}{3}=\frac{20}{3}$. 故选 B.



7. C　由题意知$t=\frac{T\cdot\ln\frac{N_0}{N}}{\ln 2}=\frac{5\,730\times\ln\frac{1.2\times10^{-12}}{4\times10^{-13}}}{\ln 2}=\frac{5\,730\ln 3}{\ln 2}=5\,730\log_2 3\approx5\,730\times1.585=9\,082.05\approx9\,082$. 故选 C.

8. A　$y=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x$. 因为$\sin 4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin(4x-\pi)=-\sin 4x$,所以①适合;因为$\sin 4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(4x+\pi)=-\sin 4x$,所以②适合;因为$\sin 4\left(x+\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(4x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos 4x$,所以③不适合;因为$\sin 4\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(4x-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos 4x$,所以④不适合. 故选 A.

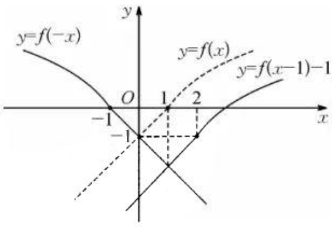
9. B　因为对任意$x,y\in\mathbf{R}$,$f(x+y)=f(x)f(y)$恒成立,所以$f(-10)=f(-5)f(-5)=9$,$f(-15)=f(-10)f(-5)=27$,则由$f(3-x)<27$,得$f(3-x)<f(-15)$,又$f(x)$是$\mathbf{R}$上的减函数,所以$3-x>-15$,解得$x<18$. 故选 B.

10. D　设两耳所在双曲线的实轴长为$2a$,焦距为$2c$,虚轴长为$2b$,则$2a=3\times10^{-5}\times334=0.01\,002(\mathrm{m})$,$2c=0.2(\mathrm{m})$,$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{b}{a}$,所以$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{b}{a}$,所以$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}}=\frac{a}{c}=\frac{2a}{2c}=\frac{0.01\,002}{0.2}=0.0\,501\approx0.05$. 故选 D.

11. A　设三棱锥$P-ABC$外接球的半径为R,则$\frac{4\pi R^3}{3}=36\pi$,所以$R=3$,又$2R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,所以$x^2+y^2+z^2=36$,所

以 $xy+yz+zx\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}+\frac{z^2+x^2}{2}=x^2+y^2+z^2=36$，当且仅当 $x=y=z=2\sqrt{3}$ 时，等号成立. 故选 A.

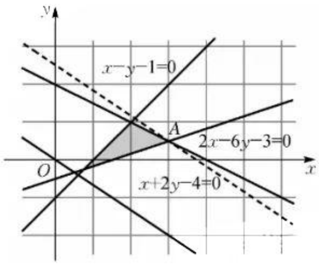
12. C　考查函数 $y=f(-x)$ 和 $y=f(x-1)-1$ 的图象，其中 $y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，将 $y=f(x)$ 的图象右移 1 个单位长度，再下移 1 个单位长度，得到 $y=f(x-1)-1$ 的图象，如图所示，由 $(-x)-1=[(x-1)-1]-1$，解得 $x=1$，所以满足 $f(-x)>f(x-1)-1$ 的 x 的取值范围是 $x<1$. 故选 C.



13. 8　根据分层抽样的特点，此样本中女生的人数为 $18\times\frac{1\,248}{1\,248+1\,560}=8$.

14. $2x-y-e=0$　因为 $f(e)=e$，$f'(x)=\ln x+1$，则 $f'(e)=2$，所以所求切线方程为 $y-e=2(x-e)$，即 $2x-y-e=0$.

15. $\frac{15}{2}$　画出可行域(如图阴影部分)，当直线 $2x+3y-z$ 过点 $A\left(3,\frac{1}{2}\right)$ 时，z 取得最大值，所以 $z_{\max}=2\times3+3\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$.



16. 3　由题意知抛物线 C 的焦点坐标为 $F\left(0,\frac{1}{3}\right)$，因为直线 l 与 C 有两个交点，所以 l 的存在斜率，所以设 l 的方程为 $y=kx+\frac{1}{3}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=kx+\frac{1}{3},\\ x^2=\frac{4}{3}y,\end{cases}$ 所以 $x^2-\frac{4}{3}kx-\frac{4}{9}=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{4}{3}k$，$x_1x_2=-\frac{4}{9}$，又 $|AF|=\frac{1}{3}+y_1$，$|BF|=\frac{1}{3}+y_2$，所以 $|AF|\cdot|BF|=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(y_1+y_2)+y_1y_2=\frac{4}{9}(1+k^2)$，$|AB|=|AF|+|BF|=\frac{2}{3}+y_1+y_2=\frac{4}{3}+k(x_1+x_2)=\frac{4}{3}(1+k^2)$，所以 $\frac{|AB|}{|AF|\cdot|BF|}=3$.

17. 解：(1)因为 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$A$ 为锐角，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，…………………… 2 分

所以 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………… 4 分

所以 $\tan\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan A+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan A\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\times1}=3+2\sqrt{2}$. …………………… 6 分

(2)因为 $\cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{1}{3}$，…………………… 8 分

则 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$，…………………… 10 分

由正弦定理，得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，即$\frac{b}{\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$，解得$b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………………… 12 分

18. 解：(1)估计 11 月份顾客到该餐厅就餐消费不少于 60 元的概率$p=\frac{20+10+10}{80}=0.5$. ……………………………… 3 分

(2)估计 11 月份顾客到该餐厅就餐消费金额的平均值为

$\frac{15\times10+45\times30+75\times20+105\times10+135\times10}{80}=\frac{5\ 400}{80}=67.5$. ………………………………………………………… 6 分

(3)填写 2×2 列联表如下：

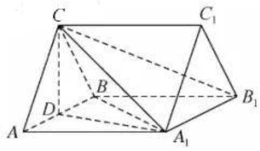
	不少于 90 元	少于 90 元	总计
男性	11	22	36
女性	6	38	44
总计	20	60	80

…… 8 分

则$K^2=\frac{80\times(14\times38-22\times6)^2}{36\times44\times60\times20}=\frac{80\times400^2}{36\times44\times60\times20}\approx6.734>6.635$，……………………………………… 11 分

故有 99%的把握认为就餐消费金额与性别有关. ………………………………………………………… 12 分

19. (1)证明：因为$CA=CB$，$CD\perp AB$，所以 D 为 AB 的中点，



连接A_1B. 由于$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60^\circ$，故$\triangle A_1AB$为等边三角形，

所以$A_1D\perp AB$. ………………………………………………………………… 2 分

又因为$CD\perp AB$，A_1D，$CD\subset$平面A_1CD，$A_1D\cap CD=D$，所以$AB\perp$平面A_1CD. ……………………………………… 4 分

又因为$AB\subset$平面ABC，所以平面$ABC\perp$平面A_1CD. ………………………………………………………… 6 分

(2)解：法一：因为平面$ABC\perp$平面AA_1B_1B，平面$ABC\cap$平面$AA_1B_1B=AB$，$CD\subset$平面ABC，$CD\perp AB$，

所以$CD\perp$平面AA_1B_1B. ………………………………………………………………………… 8 分

由$CA=CB=AB=2$，得$\triangle ABC$是等边三角形，则$CD=\sqrt{3}$；

由$\triangle A_1AB$是等边三角形，得$S_{\triangle A_1AB}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=\sqrt{3}$，

所以$V_{C\text{-}A_1AB}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1AB}\cdot CD=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$. ………………………………………………………… 10 分

连接B_1C，由于ABB_1A_1和BCC_1B_1都是平行四边形，所以$S_{\triangle A_1AB}=S_{\triangle A_1B_1B}$，$S_{\triangle B_1BC}=S_{\triangle B_1C_1C}$，

所以$V_{C\text{-}A_1AB}=V_{C\text{-}A_1B_1B}=V_{A_1\text{-}B_1BC}=V_{A_1\text{-}B_1C_1C}$，

于是$V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=V_{C\text{-}A_1AB}+V_{A_1\text{-}B_1BC}+V_{A_1\text{-}B_1C_1C}=3V_{C\text{-}A_1AB}=3\times1=3$. ……………………………………… 12 分

法二：由(1)，得$A_1D\perp AB$，

因为平面$ABC\perp$平面AA_1B_1B，平面$ABC\cap$平面$AA_1B_1B=AB$，$A_1D\subset$平面AA_1B_1B，

所以 $A_1D\perp$ 平面 ABC. …………………………………………………………………… 8 分

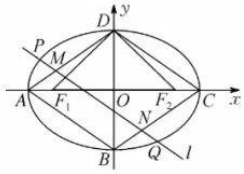
由 $\triangle A_1AB$ 是边长为 2 的等边三角形，得 $A_1D=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$. ……………………………… 9 分

由 $CA=CB=AB=2$，得 $\triangle ABC$ 是等边三角形，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$，……………………… 10 分

于是 $V_{ABC\text{-}A_1B_1C_1}=A_1D\cdot S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$. ……………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2b=2\sqrt{2}$； ① ……………………………… 1 分

因为 $\triangle DF_1F_2$ 为等腰三角形，所以 $\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot b=1$. ② ……………………… 2 分



由①②，再结合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，$b=c=1$.

故椭圆 E 的方程是 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………………… 4 分

(2)证明：设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$.

由 $A(-\sqrt{2},0)$，$B(0,-1)$，得直线 AB 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-1$，…………………………………… 5 分

则可设直线 l 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+n(-1<n<1)$，………………………………………………… 6 分

由 $\begin{cases} y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+n(-1<n<1), \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $x^2-\sqrt{2}nx+n^2-1=0$，

则 $\Delta=2n^2-4(n^2-1)=4-2n^2>0$，且 $x_1+x_2=\sqrt{2}n$. ……………………………………………… 8 分

直线 AD 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$，直线 BC 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-1$，

由 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+1, \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+n, \end{cases}$ 解得 $x_3=\frac{n-1}{\sqrt{2}}$；……………………………………………………… 9 分

由 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-1, \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+n, \end{cases}$ 解得 $x_4=\frac{n+1}{\sqrt{2}}$，……………………………………………………… 10 分

于是 $x_3+x_4=\frac{n-1}{\sqrt{2}}+\frac{n+1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}n$，

所以 $x_1+x_2=x_3+x_4$，即 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_3+x_4}{2}$，

从而 PQ 与 MN 的中点重合，所以 $|PM|=|NQ|$. ……………………………………………… 12 分

21. (1)解：函数 $f(x)=xe^x-x$ 的定义域是 **R**.

由 $f(x)=xe^x-x$，得 $f'(x)=e^x+xe^x-1=(1+x)e^x-1$， ………………………………………… 1分

当 $x>0$ 时，$1+x>1$，$e^x>1$，所以 $(1+x)e^x>1$. 所以 $(1+x)e^x-1>0$，即 $f'(x)>0$； ……………… 2分

当 $x<0$ 时，$1+x<1$，$0<e^x<1$，所以由 $1+x<1$ 两边同时乘以正数 e^x，得 $(1+x)e^x<e^x<1$，即 $(1+x)e^x<1$. 所以

$(1+x)e^x-1<0$，即 $f'(x)<0$. ………………………………………………………………………… 3分

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$. ……………………………… 4分

(2)证明："不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立"等价于"不等式 $xe^x-x\geqslant\ln x+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立". 等价于"不等式 $xe^x-x-\ln x-1\geqslant0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立".

令 $F(x)=xe^x-\ln x-x-1\ (x>0)$，则进一步转化为证明"不等式 $F(x)\geqslant0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立". …… 5分

$F'(x)=(x+1)e^x-\frac{1}{x}-1=\frac{x+1}{x}\cdot(xe^x-1)$，

令 $G(x)=xe^x-1$，则 $G'(x)=(x+1)e^x\ (x>0)$.

因为当 $x>0$ 时，$G'(x)=(x+1)e^x>0$，

所以函数 $G(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $G(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上最多有一个零点.

又因为 $G(0)=-1<0$，$G(1)=e-1>0$，所以存在唯一的 $c\in(0,1)$，使得 $G(c)=0$. ……………………… 7分

且当 $x\in(0,c)$ 时，$G(x)<0$；当 $x\in(c,+\infty)$ 时，$G(x)>0$，

即当 $x\in(0,c)$ 时，$F'(x)<0$；当 $x\in(c,+\infty)$ 时，$F'(0)>0$，

所以函数 $F(x)$ 在区间 $(0,c)$ 上单调递减，在区间 $(c,+\infty)$ 上单调递增.

从而 $F(x)\geqslant F(c)=ce^c-\ln c-c-1$. ………………………………………………………………… 9分

由 $G(c)=0$，得 $ce^c-1=0$，即 $ce^c=1$，

两边取对数得 $\ln c+c=0$， …………………………………………………………………………………… 10分

所以 $F(c)=ce^c-\ln c-c-1=(ce^c-1)-(\ln c+c)=0-0=0$. ……………………………………… 11分

所以 $F(x)\geqslant F(c)=0$，即 $F(x)\geqslant0$.

从而证得不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立. ……………………………………………… 12分

22. 解：(1)将 $\begin{cases}x=4-t,\\ y=\frac{t}{3}\end{cases}$ 消去参数 t，得 $4-x=3y$，即 $x+3y-4=0$.

所以曲线 C_1 的普通方程为 $x+3y-4=0$. ……………………………………………………………… 2分

由 $\rho=4\sin\theta$，得 $\rho^2=4\rho\sin\theta$，代入公式 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=4y$，

所以 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4y=0$. ………… 5 分

(2)曲线 C_1 的标准参数方程为 $\begin{cases} x=4-\dfrac{3}{\sqrt{10}}t, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}t, \end{cases}$ ………… 6 分

代入 $x^2+y^2-4y=0$，得 $\left(4-\dfrac{3}{\sqrt{10}}t\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}t\right)^2-4\times\dfrac{1}{\sqrt{10}}t=0$，化简得 $t^2-\dfrac{28}{\sqrt{10}}t+16=0$.

因为 $\Delta=\left(\dfrac{28}{\sqrt{10}}\right)^2-4\times16>0$，$t_1t_2=16$， ………… 8 分

曲线 C_1 是过点 $P(4,0)$ 的一条直线，与曲线 C_2 交于 A,B 两点，

所以 $|PA|\cdot|PB|=t_1t_2=16$. ………… 10 分

23. 解：(1)因为 $f(x)=\begin{cases} 4-4x, x<-\dfrac{1}{2}, \\ 6, -\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}, \\ 4x-4, x>\dfrac{5}{2}, \end{cases}$ ………… 2 分

所以当 $x<-\dfrac{1}{2}$ 时，由 $f(x)\leqslant10$，得 $4-4x\leqslant10$，得 $-\dfrac{3}{2}\leqslant x<-\dfrac{1}{2}$；

当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}$ 时，由 $f(x)\leqslant10$，得 $6\leqslant10$ 恒成立，故 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}$；

当 $x>\dfrac{5}{2}$ 时，由 $f(x)\leqslant10$，得 $4x-4\leqslant10$，得 $\dfrac{5}{2}<x\leqslant\dfrac{7}{2}$.

综上，不等式 $f(x)\leqslant10$ 的解集为 $\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2}\right]$. ………… 5 分

(2)由 $-x^2+2x-1+a\leqslant f(x)$，得 $-(x-1)^2+a\leqslant f(x)$，得 $a\leqslant(x-1)^2+f(x)$. ………… 6 分

因为 $f(x)\geqslant|(2x-5)-(2x+1)|=6$，当且仅当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}$ 取等号，

所以当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 6， ………… 8 分

所以当 $x=1$ 时，$(x-1)^2+f(x)$ 取得最小值 6， ………… 9 分

故 $a\leqslant6$，即 a 的取值范围为 $(-\infty,6]$. ………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》