2022—2023 学年第一学期高三期中联考

数学理科参考答案

1.【答案】B

【解析】因为集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{x|x^2-3x<0,x\in\mathbf{Z}\}=\{x|0<x<3,x\in\mathbf{Z}\}=\{1,2\}$，所以 $C=\{0,1,2,4\}$，所以 $B\cup C=\{0,1,2,4\}$，故选 B.

2.【答案】C

【解析】含有一个量词的命题的否定规律是“改量词否结论”，所以命题“$\forall x\in\mathbf{R},\ln(x^2+x+1)\geqslant1$”的否定是“$\exists x\in\mathbf{R},\ln(x^2+x+1)<1$”，故选 C.

3.【答案】B

【解析】因为 $0<a=0.6^{\frac{1}{3}}<1$，$b=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}>1$，$c=\log_3 0.6<0$，所以 $c<a<b$，故选 B.

4.【答案】B

【解析】根据表情包可知连续不一定可导，但是可导一定连续，故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的必要不充分条件，故选 B.

5.【答案】C

【解析】将函数 $y=f(x)$ 的图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，再将所得图象上各点的纵坐标伸长到原来的 2 倍，得到函数 $y=2f\left(\frac{1}{2}x\right)$ 的图象，根据 $y=f(x)$ 的部分图象可知，只有选项 C 符合，故选 C.

6.【答案】A

【解析】因为 $y'=qe^{qx-3}$，所以 $qe^{qx_0-3}=p$，又 $px_0+1=\frac{p}{q}$，则 $x_0=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，故选 A.

7.【答案】D

【解析】对 A，当且仅当 $x=1$ 时等号成立；对 B，当且仅当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时等号成立；对 C，当且仅当 $x=-8$ 时等号成立；对 D，当且仅当 $\sqrt{x^2+5}=\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$，即 $x^2=-4$ 时等号成立，与 $x\in\mathbf{R}$ 相矛盾，故选 D.

8.【答案】B

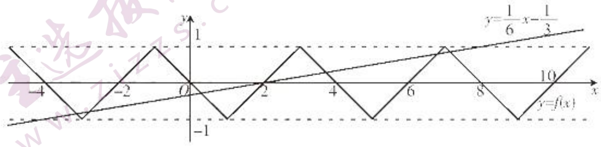
【解析】当 $t\in[6,14]$ 时，$\frac{\pi}{8}t+\frac{3\pi}{4}\in\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$，则 $T=25+10\sin\left(\frac{\pi}{8}t+\frac{3\pi}{4}\right)$ 在 $[6,14]$ 上单调递增，设花开、花谢的时间分别为 t_1,t_2，由 $T_1=20$，得 $\sin\left(\frac{\pi}{8}t_1+\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$，故 $\frac{\pi}{8}t_1+\frac{3\pi}{4}=\frac{11\pi}{6}$，解得 $t_1=\frac{26}{3}\approx8.7$ 时；由 $T_2=31$，得 $\sin\left(\frac{\pi}{8}t_2+\frac{3\pi}{4}\right)=0.6\approx\sin\frac{\pi}{5}$，故 $\frac{\pi}{8}t_2+\frac{3\pi}{4}\approx\frac{\pi}{5}+2\pi$，解得 $t_2\approx11.6$ 时，故在 6 时 ~ 14 时中，观花的最佳时段约为 8.7 时 ~ 11.6 时，故选 B.

9.【答案】C

【解析】$\because \boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(3x-1,x+1)$，$\boldsymbol{c}=(5,7)$，$\therefore \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3x,x+4)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(6,10)$，又 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$，$\therefore 30x=6x+24$，解得 $x=1$，$\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(m,3m)+(2n,2n)=(m+2n,3m+2n)=(5,7)$，即 $\begin{cases}m+2n=5\\3m+2n=7\end{cases}$，解得 $m=1,n=2$，则 $m+n=3$，故选 C.

10.【答案】D 免费下载公众号《高中僧试卷》

【解析】由题意可得 $f(x+2)=-f(x)=f(-x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，且直线 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，且 $f(x+4)=-f(x+2)=-f(-x)$，故点 $(2,0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心，作出函数 $f(x)$ 的图象如下图所示.



且当 $x\geqslant 8$ 时，$y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}\geqslant 1$；当 $x\leqslant -4$ 时，$y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}\leqslant -1$. 且直线 $y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$ 关于点 $(2,0)$ 对称，由图可知，直线 $y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$ 与曲线 $y=f(x)$ 有 7 个不同的公共点，故 $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_7=7\times 2=14$，$y_1+y_2+y_3+\cdots+y_7=0$，因此，$\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i+y_i)=14$，故选 D.

11.【答案】C

【解析】由 $f'(x)=\frac{2}{x\ln a}-2ex=0$ 得，$\frac{\frac{1}{\ln a}}{x}=ex$，令 $g(x)=\frac{\frac{1}{\ln a}}{x}$，$h(x)=ex$，$x>0$. 若 $a>1$，则 $\frac{1}{\ln a}>0$，曲线 $g(x)$ 与曲线 $h(x)$ 在第一象限有唯一交点，其横坐标为 x_0，在 x_0 左右两侧 $f'(x)$ 异号，因此 x_0 是函数 $f(x)$ 的唯一极值点，满足条件；若 $0<a<1$，则 $\frac{1}{\ln a}<0$，曲线 $g(x)$ 与曲线 $h(x)$ 在第一象限没有交点，不满足条件，因此实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$，故选 C.

12.【答案】D

【解析】由 $c^2=8S=8\times\frac{1}{2}bc\sin A$，得 $c=4b\sin A$，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+16b^2\sin^2 A-2b\cdot 4b\cdot\sin A\cos A$，即 $\frac{a^2}{b^2}=1+16\sin^2 A-4\sin 2A=9-8\cos 2A-4\sin 2A=9-4\sqrt{5}\sin(2A+\varphi)\left(\text{其中}\tan\varphi=2,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以当 $2A+\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$\left(\frac{a^2}{b^2}\right)_{\min}=9-4\sqrt{5}$，所以 $\left(\frac{a}{b}\right)_{\min}=\sqrt{5}-2$，故选 D.

13.【答案】6

【解析】依题意，$|2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}|^2=4\boldsymbol{m}^2-12\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+9\boldsymbol{n}^2=4\times 9-12\times 3\times 2\times\frac{1}{2}+9\times 4=36$，故 $|2\boldsymbol{m}-3\boldsymbol{n}|=6$.

14.【答案】$\frac{7\pi}{3}$

【解析】根据题意，可得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=7$，得 $BC=\sqrt{7}$，设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 r，$2r=\frac{BC}{\sin A}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{21}}{3}\Rightarrow S=\pi r^2=\frac{7\pi}{3}$.

15.【答案】$\frac{6}{5}$

【解析】$\frac{\sin\theta\cos 2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}=\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)=\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=\frac{\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan\theta+\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2+4}{5}=\frac{6}{5}$.

16.【答案】$(-3,-1)$

【解析】根据题意，得 $a-1<0$，易知点 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$ 关于直线 $x=\frac{a-1}{2}$ 对称，所以 $x_1+x_2=a-1$，因为 $0<x_3<1<x_4$，所以 $-\ln x_3=\ln x_4$，所以 $x_3x_4=1$，所以 $(x_1+x_2)x_3x_4=a-1\in(-4,-2)$，所以 $a\in(-3,-1)$.

17. 解：(1) $f(x)=(1-\log_3 x)(2+\log_3 x)=-(\log_3 x)^2-\log_3 x+2$

$=-\left(\log_3 x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\leqslant\frac{9}{4}$，

所以 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$.（5 分）

(2) 根据题意得 $-(\log_3 x)^2-\log_3 x+2<-4$，

整理得 $(\log_3 x)^2+\log_3 x-6>0$，

即 $(\log_3 x+3)(\log_3 x-2)>0$，

解得 $\log_3 x<-3$ 或 $\log_3 x>2$.（9 分）

所以 $0<x<\frac{1}{27}$ 或 $x>9$，(11 分)

故不等式的解集为 $\left(0,\frac{1}{27}\right)\cup(9,+\infty)$.(12 分)

18. 解：(1) $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，(3 分)

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，(5 分)

则 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$.(6 分)

(2) 由 (1) 可得 $g(x)=2\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right)+1=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，(8 分)

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，(9 分)

所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，所以 $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1\in[-\sqrt{3}+1,3]$，(11 分)

即 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}+1,3]$.(12 分)

19. 解：原式可化为 $\frac{2\sin^2 B}{\sin B}=\frac{2\sin A\cos A}{\sin A}$，可得 $\sin B=\cos A$.(2 分)

(1) 因为 $C=\frac{\pi}{6}$，所以 $A=\frac{5\pi}{6}-B$，

得 $\sin B=\cos\left(\frac{5\pi}{6}-B\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$，(4 分)

得 $\tan B=-\sqrt{3}$，因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$.(6 分)

(2) $\sin B=\cos A=\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$，因为 $\triangle ABC$ 不是钝角三角形，所以 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\frac{\pi}{2}-A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，

又由 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以 $B=\frac{\pi}{2}-A$，即 $C=\frac{\pi}{2}$，(8 分)

故 $a^2+b^2=c^2=1$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\leqslant\frac{1}{4}(a^2+b^2)=\frac{1}{4}$，(10 分)

当且仅当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，所以 $\triangle ABC$ 的面积的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{4}\right]$.(12 分)

20. 解：(1) 由 $f(x)=2x-a\sin x$，可得 $f'(x)=2-a\cos x$，(1 分)

所以 $f(\pi)+f'(\pi)=2\pi-a\sin\pi+2-a\cos\pi=2\pi$，解得 $a=-2$.(4 分)

(2) 由 $f(x)\geqslant-\sin 2x$，即 $2x-a\sin x+\sin 2x\geqslant 0$，

由 $x\in(0,\pi)$，得 $a\leqslant\frac{2x+\sin 2x}{\sin x}=\frac{2x}{\sin x}+2\cos x$，(5 分)

令 $h(x)=\frac{2x}{\sin x}+2\cos x$，$x\in(0,\pi)$，

$h'(x)=\frac{2\sin x-2x\cos x-2\sin^3 x}{\sin^2 x}=\frac{2\sin x\cos^2 x-2x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{2\cos x(\sin x\cos x-x)}{\sin^2 x}$，(7 分)

令 $m(x)=\sin x\cos x-x$，$x\in(0,\pi)$，

$m'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x-1=\cos 2x-1<0$，(8 分)

得 $m(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，$m(x)<m(0)=0$，(9 分)

从而 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，(11 分)

$\therefore h(x)_{\min}=h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$,故 $a\leqslant\pi$,

所以 a 的取值范围为 $\{a|a\leqslant\pi\}$.(12 分)

21. (1)解:$f'(x)=ae^x-a=a(e^x-1)$,(1 分)

$x>0$ 时,$e^x>1$;$x<0$ 时,$e^x<1$,

当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;(3 分)

当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.(5 分)

(2)证明:$h(x)$ 有两个不同的零点 x_1,x_2,则 $x_1=ae^{x_1}$,$x_2=ae^{x_2}$,(6 分)

因此 $x_1-x_2=a(e^{x_1}-e^{x_2})$,即 $a=\dfrac{x_1-x_2}{e^{x_1}-e^{x_2}}$,

要证 $x_1+x_2>2$,只要证明 $a(e^{x_1}+e^{x_2})>2$,即证 $(x_1-x_2)\dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}}{e^{x_1}-e^{x_2}}>2$,(7 分)

不妨设 $x_1>x_2$,记 $t=x_1-x_2$,则 $t>0$,$e^t>1$,因此只要证明 $t\cdot\dfrac{e^t+1}{e^t-1}>2$,即 $(t-2)e^t+t+2>0$.

记 $m(t)=(t-2)e^t+t+2$,$m'(t)=(t-1)e^t+1$,令 $\varphi(t)=(t-1)e^t+1$,则 $\varphi'(t)=te^t$,

当 $t>0$ 时,$\varphi'(t)=te^t>0$,所以函数 $\varphi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,则 $\varphi(t)>\varphi(0)=0$,

即 $m'(t)>m'(0)=0$,则 $m(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $m(t)>m(0)=0$,

即 $(t-2)e^t+t+2>0$ 成立,所以 $x_1+x_2>2$.(12 分)

22. 解:(1)由 $\begin{cases}x=2\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),得 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

故曲线 C 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.(2 分)

由 $2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+2=0$,

故直线 l 的直角坐标方程为 $2x-y+2=0$.(4 分)

(2)由题意可知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}t\\y=2+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$($t$ 为参数).(5 分)

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程并整理得 $17t^2+32\sqrt{5}t+60=0$,(7 分)

设 A,B 对应的参数分别是 t_1,t_2,

则 $t_1+t_2=-\dfrac{32\sqrt{5}}{17}$,$t_1t_2=\dfrac{60}{17}$,(8 分)

故 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{8\sqrt{5}}{15}$.(10 分)

23. 解:(1)因为 $f(x)=|x-3|+|x+2|=\begin{cases}-2x+1,x\leqslant-2,\\5,-2<x<3,\\2x-1,x\geqslant3,\end{cases}$ (2 分)

所以 $f(x)\leqslant7$ 等价于 $\begin{cases}x\leqslant-2\\-2x+1\leqslant7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2<x<3\\5\leqslant7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant3,\\2x-1\leqslant7,\end{cases}$(3 分)

解得 $-3\leqslant x\leqslant4$,即不等式 $f(x)\leqslant7$ 的解集为 $[-3,4]$.(5 分)

(2)因为 $f(x)=|x-3|+|x+a|\geqslant|a+3|$,(7 分)

所以 $|a+3|\geqslant2$,所以 $a+3\geqslant2$ 或 $a+3\leqslant-2$,(8 分)

解得 $a\geqslant-1$ 或 $a\leqslant-5$,即 a 的取值范围为 $(-\infty,-5]\cup[-1,+\infty)$.(10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。