Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2023 届高三第二次联考

数学参考答案

一、二 选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	D	B	C	B	A	B	C	A	BCD	AC	BD	ABD

三、填空题

13．0　　14．1或$\frac{\sqrt{21}}{3}$　　15．9　　16．$[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{19}-\sqrt{3}}{4}]$或$[\frac{1}{2},\sqrt{\frac{11-\sqrt{57}}{8}}]$

四、解答题

17．解析：

（1）由$2\sqrt{S_n}=a_n+1$可得$4S_n=a_n^2+2a_n+1$①，$4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}+1$②，

由①-②可得：$4(S_n-S_{n-1})=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$，即$4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$，

即$a_n^2-a_{n-1}^2-2a_n-2a_{n-1}=0$，化简可得$a_n-a_{n-1}=2$（$n\ge 2$），可知数列$\{a_n\}$为以 1 为首项，公差为 2 的等差数列，则$a_n=a_1+(n-1)\times 2=2n-1$．　…………………5 分

（2）由（1）得：$b_2=a_2=2\times 2-1=3$，∵数列$\{b_n\}$为等比数列，

$\therefore q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{3}{1}=3$，$b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$，则

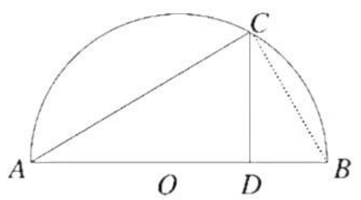
$(a_n+1)b_n=(2n+1-1)3^{n-1}=2n\times 3^{n-1}$，

则$T_n=2(1+2\times 3+3\times 3^2+\cdots+n\times 3^{n-1})$③，$3T_n=2(3+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+n\times 3^n)$④，

③-④得：$-2T_n=2(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\times 3^n)=2\left(\frac{1-3^n}{1-3}-n\times 3^n\right)$，则$T_n=\frac{(2n-1)3^n+1}{2}$．

…………………10 分

18．解析：



（1）如图，连接 BC．在$Rt\Delta ABC$中，$AC=\sqrt{3}$，$AB=2$，$\cos\angle CAB=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则$\angle CAB=30^\circ$．

在ΔACD中，$AD=AC\cos 30^\circ=\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$，

所以$S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}|AD||AC|\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$．　…………………6 分

（2）设$\angle CAD=\theta$，易知$0<\theta<\frac{\pi}{2}$．在ΔACD中，

$$\frac{|AC|+|CD|}{|AC|+|AD|}=\frac{1+\frac{|CD|}{|AC|}}{1+\frac{|AD|}{|AC|}}=\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}(\tan\frac{\theta}{2}+1)^2 ①,$$

因为$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以$0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$，则$0<\tan\frac{\theta}{2}<1$，代入①式可得：$\frac{|AC|+|CD|}{|AC|+|AD|}$的取值范围为：$(\frac{1}{2},2)$．　　…………………12 分

19．解析：

（1）2×2 列联表

	甲组	乙组	合计
男生	18	32	50
女生	30	20	50
合计	48	52	100

…………………3 分

（2）零假设为H_0：学生选排球还是篮球与性别无关

由2×2列联表可得

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100\times(18\times20-30\times32)^2}{48\times52\times50\times50}\approx5.769>3.841;$$

有95%的把握认为"甲组"用户与"性别"有关.　　…………………7 分

（3）按分层抽样，甲组中女生 3 人，乙组中女生 2 人

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$

∴ 概率分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

数学期望$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$.　　…………………12 分

20．解析：

（1）连接AC，$\because E$为PB中点，F为AB中点，

$\therefore EF//PA$，$\because EF\not\subset$面PAO，$PA\subset$面PAO，$\therefore EF//$面PAO

在ΔPCO中，$OP=1,CP=2,\angle CPO=\frac{\pi}{3}$，$\therefore OC=\sqrt{3}$，

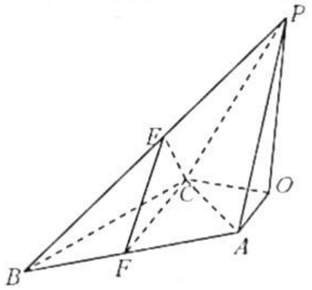
在ΔACO中，$OA=1,\angle AOC=\frac{\pi}{2}$，$\therefore AC=2,\angle OAC=\frac{\pi}{3}$，

在ΔACB中，$AB=4,\angle ABC=\frac{\pi}{6}$，$\therefore\angle ACB=\frac{\pi}{2},\angle CAB=\frac{\pi}{3}$，$\therefore\angle OAB=\frac{2\pi}{3}$

$\because F$ 为 AB 中点，$\therefore CF=\frac{1}{2}AB=2,\angle CFB=\frac{2\pi}{3}$ $\therefore OA//CF$

$\because CF\not\subset$ 面 PAO，$OA\subset$ 面 PAO，$\therefore CF//$ 面 PAO

$\because CF\cap EF=F,CF,EF\subset$ 面 CEF $\therefore$ 平面 $CEF//$ 平面 PAO



………………5 分

（2）解法一：

延长 CO 与 BA 交于 H，连 PH，则面 $PAB\cap$ 面 $POC=PH$．

$\because PO\perp CO,OA\perp CO,PO\cap OA=O$，$\therefore CO\perp$ 面 POA，$\therefore$ 面 $PCO\perp$ 面 POA．

过 A 作 $AM\perp PO$，则 $AM\perp$ 面 PCO．$\because PH\subset$ 面 PCO，$\therefore AM\perp PH$．

过 A 作 $AN\perp PH$，连 MN，

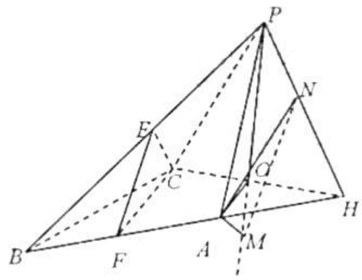
$\because AM\cap AN=A,AM\subset$ 面$AMN,AN\subset$ 面AMN，$\therefore PH\perp$ 面 AMN．

$\therefore PH\perp MN$，$\therefore\angle ANM$ 即为面 POC 与面 PAB 所成二面角的平面角

$\because OP=OA=1,PA=\sqrt{3},\therefore\angle POA=120^{\circ}$

$\because CF=2,OA//CF,\therefore OH=\sqrt{3},AH=2$，$\therefore PH=2$，$\therefore AN=\frac{\sqrt{39}}{4}$，$\therefore MN=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\cos\angle ANM=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{4}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$ ．………………12 分



解法二：

以 OC 为 x 轴，OA 为 y 轴，过 O 且垂直于面 $OABC$ 的射线为 z 轴建立空间直角坐标系，

$O(0,0,0),A(0,1,0),C(\sqrt{3},0,0),B(2\sqrt{3},3,0)$，则 $P(x,y,z)$

$$\begin{cases}PO=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1\\PC=\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+y^2+z^2}=2\\PA=\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2+z^2}=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=-\dfrac{1}{2}\\z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\therefore P\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

设平面 POC 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{OP}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{OC}=\left(\sqrt{3},0,0\right)$

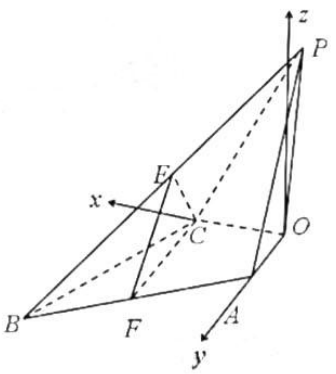
$$\begin{cases}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}y_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\\x_1=0\end{cases}$$，令 $z_1=1$，则 $y_1=\sqrt{3}$，$\therefore\overrightarrow{n_1}=\left(0,\sqrt{3},1\right)$

设平面 PAB 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{AP}=\left(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{AB}=\left(2\sqrt{3},2,0\right)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{3}x_2+2y_2=0\\-\dfrac{3}{2}y_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\end{cases}$$令 $x_2=1$，则 $y_2=-\sqrt{3},z_2=-3$，$\therefore\overrightarrow{n_2}=\left(1,-\sqrt{3},-3\right)$

$\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle=-\frac{3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$　　$\therefore$ 平面 POC 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$．

…………………12 分



21．解析：

（1）设双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，易知 $a=1$．由题意可知：ΔOFG 为等腰三角形，则 $x_G=\frac{c}{2}$，代入 $y=\frac{b}{a}x$ 得：$y_G=\frac{bc}{2a}=\frac{bc}{2}$，则 $S_{\Delta OFG}=\frac{1}{2}\times c\times\frac{bc}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，又 $c^2=a^2+b^2=1+b^2$，则解得 $b=\sqrt{2}$，则双曲线 $E:x^2-\frac{y^2}{2}=1$．

…………………4 分

（2）设直线 l 的方程为：$x=ty+m(m>0,且m\neq1)$，$C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$．

联立 $\begin{cases}x=ty+m\\x^2-\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$，消 x 得：$(t^2-\frac{1}{2})y^2+2mty+m^2-1=0$，$y_1+y_2=\dfrac{-2mt}{t^2-\frac{1}{2}},y_1y_2=\dfrac{m^2-1}{t^2-\frac{1}{2}}$，

$y_1y_2=\frac{m^2-1}{-2mt}(y_1+y_2)$.

易得：$AC:y=\frac{y_1}{x_1+1}(x+1)$ ①，$BD:y=\frac{y_2}{x_2-1}(x-1)$ ②，联立①②，解得：

$x_H=\frac{y_2x_1+y_1x_2+y_2-y_1}{y_2x_1-y_1x_2+y_2+y_1}$．又 $y_2x_1=y_2(ty_1+m)=ty_2y_1+my_2$，同理，$y_1x_2=ty_1y_2+my_1$，把它们代入 x_H，得 $x_H=\frac{2ty_1y_2+m(y_1+y_2)+y_2-y_1}{m(y_2-y_1)+y_2+y_1}=\frac{-\frac{m^2-1}{m}(y_1+y_2)+m(y_1+y_2)+y_2-y_1}{m(y_2-y_1)+y_2+y_1}$

$=\frac{\frac{1}{m}(y_1+y_2)+y_2-y_1}{m(y_2-y_1)+y_2+y_1}=\frac{1}{m}\frac{y_1+y_2+m(y_2-y_1)}{m(y_2-y_1)+y_2+y_1}=\frac{1}{m}$，故 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OH}=mx_H=m\times\frac{1}{m}=1$，得证.

…………………12 分

22．解析：

（1）$f'(x)=\frac{\lambda}{\lambda x+1}-\lambda+x=\frac{-\lambda^2x+\lambda x^2+x}{\lambda x+1}=\frac{\lambda x[x-(\lambda-\frac{1}{\lambda})]}{\lambda x+1}$.

① 若 $\lambda-\frac{1}{\lambda}\le 0$，即 $0<\lambda\le 1$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，故 $f(x)>f(0)=0$，满足条件；

② 若 $\lambda-\frac{1}{\lambda}>0$，即 $\lambda>1$，当 $x\in(0,\lambda-\frac{1}{\lambda})$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，则 $f(x)<f(0)=0$，矛盾，不符合题意.

综上：$0<\lambda\le 1$.　　…………………4 分

（2）先证右侧不等式，如下：

由（1）可得：当 $\lambda=1$ 时，有 $f(x)=\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}>0$，则 $f(\frac{1}{x})=\ln(\frac{1}{x}+1)-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}>0$，

即 $\ln(x+1)-\ln x>\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}$，即 $2\ln(x+1)-2\ln x>\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$，则有

$2\ln(n+1)-2\ln n+2\ln n-2\ln(n-1)+\cdots+2\ln 2-2\ln 1>\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n-1}-\frac{1}{(n-1)^2}+\cdots+\frac{2}{1}-\frac{1}{1^2}=$，

$\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{i}-\frac{1}{i^2})$

即 $2\ln(n+1)>\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{i}-\frac{1}{i^2})$，右侧不等式得证.　　…………………8 分

下证左侧不等式，如下：

易知 $\ln(x+1)<x(x>0)$，可得 $\ln(\frac{1}{x}+1)<\frac{1}{x}$，即 $\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$，则有

$\ln(n+1)-\ln n+\ln n-\ln(n-1)+\cdots+\ln 2-\ln 1<\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{1}$，

即 $\ln(n+1)<\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{1}$.

$\frac{1}{n^2}=\frac{4}{4n^2}<\frac{4}{4n^2-1}=2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，则

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+2(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})<\frac{5}{3}$，故

$2\ln(n+1)-\frac{5}{3}<2(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{1})-(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})=\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{i}-\frac{1}{i^2})$，左侧得证.

综上，不等式 $2\ln(n+1)-\frac{5}{3}<\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{i}-\frac{1}{i^2})<2\ln(n+1)$ 成立.　　　…………………12 分

（评分标准仅供参考，具体阅卷评分由阅卷学校商定）