中原名校 2019—2020 学年上期期末联考

高三数学（理）参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	D	B	C	B	B	A	C	D	A	D

1.【解析】由已知解得 $A=[-1,3],B=(1,+\infty)$，所以 $A\cap B=(1,3]$.

2.【解析】由 $z=1+i^{2019}=1-i$，所以 $|z-2i|=|1-3i|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

3.【解析】$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$，分子分母同时除以 $\cos^2\theta$，即得：

$$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{4}{5}.$$

4.【解析】设切点为 $(x_0,a\ln x_0+2)$，因为 $y'=\dfrac{a}{x}$，故切线的斜率 $k=\dfrac{a}{x_0}=1$，所以 $x_0=a$，

所以 $a\ln a+2=a+1$，因为 $a>0$，故 $a=1$.

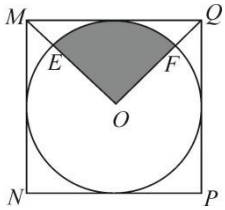
5.【解析】因为 $a_1a_7=4$，所以 $a_4{}^2=4,\because a_n>0,\therefore a_4=2$.因为 $a_4+2a_7=\dfrac{5}{2}$，

所以 $a_7=\dfrac{1}{4}$.所以 $q^3=\dfrac{1}{8}$，所以 $q=\dfrac{1}{2}$，$a_1=16$，所以 $S_5=\dfrac{16[1-(\frac{1}{2})^5]}{1-\frac{1}{2}}=31$.

6.【解析】因为 $f(-x)=\ln\dfrac{|2(-x)|}{\pi}-\cos(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，排除 A，D；

当 $x=2$ 时，$f(2)=\ln\dfrac{4}{\pi}-\cos 2>0$，排除 C.

7.【解析】如图所示，半径为 1 的圆 O 是正方形 $MNPQ$ 的内切圆，

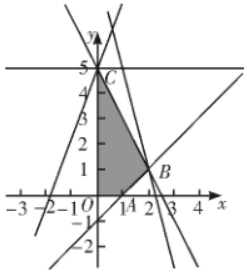


将一颗豆子随机地扔到正方形 $MNPQ$ 内，用 A 表示事件“豆子落在圆 O 内”，B 表示事件“豆子落在扇形 OEF（阴影部分）内”，则 $P(A)=\frac{\pi\times1^2}{2^2}=\frac{\pi}{4}$，$P(AB)=\frac{\frac{1}{4}\times\pi\times1^2}{2^2}=\frac{\pi}{16}$，

$\therefore P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{\pi}{16}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}$.

8.【解析】根据该几何体的三视图，可得该几何体表示左边是一个棱长为 2 的正方体，右边是一个长为 1，宽和高为 2 的长方体截去一个底面半径为 1，高为 2 的半圆柱，所以几何体的体积为 $V=2\times2\times2+2\times2\times1-\frac{1}{2}\pi\times1^2\times2=12-\pi$.故选 A.

9.【解析】如图，作出不等式组对应的平面区域，为阴影部分 $OABC$.则 $A(1,0),B(2,1),C(0,5)$，由 $z=y-ax$ 得 $y=ax+z$，平移直线 $y=ax+z$，则直线的截距最大时，z 也最大.当 $a=0$ 时，$y=z$ 在 C 处的截距最大，此时不满足条件；当 $a>0$ 时，直线 $y=ax+z$，在 C 处的截距最大，此时不满足条件；当 $a<0$ 时，直线 $y=ax+z$，要使 $(2,1)$ 是目标函数 $z=y-ax$ 取最大值的唯一最优解，则 $y=ax+z$ 在 B 处的截距最大，此时目标函数的斜率 a 须小于直线 BC 的斜率 -2，即 $a<-2$.



10.【解析】由 $a_n=\frac{S_n}{n}+2(n-1)\left(n\in N^*\right)$ 得 $S_n=na_n-2n(n-1)$.则当 $n\geq2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=na_n-(n-1)a_{n-1}-4(n-1)$，整理得 $a_n-a_{n-1}=4$，

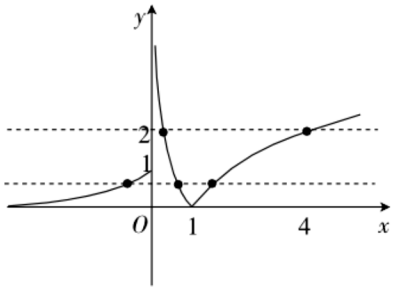
所以 $\{a_n\}$ 是公差为 4 的等差数列，又 $a_1=1$，所以 $a_n=4n-3\left(n\in N^*\right)$，

从而 $S_n+3n=\frac{n\left(a_1+a_n\right)}{2}+3n=2n^2+2n=2n(n+1)$，

所以$\dfrac{1}{S_n+3n}=\dfrac{1}{2n(n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

故数列$\left\{\dfrac{1}{S_n+3n}\right\}$的前 10 项的和$S_{10}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{11}\right)=\dfrac{5}{11}$.

11.【解析】函数$g\left(x\right)=3f^2\left(x\right)-8f\left(x\right)+4=\left[3f\left(x\right)-2\right]\left[f\left(x\right)-2\right]$的零点，即方程$f\left(x\right)=\dfrac{2}{3}$和$f\left(x\right)=2$的根，函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\left|\log_2 x\right|, x>0,\\ 2^x, x\le 0\end{cases}$的图象如图所示：



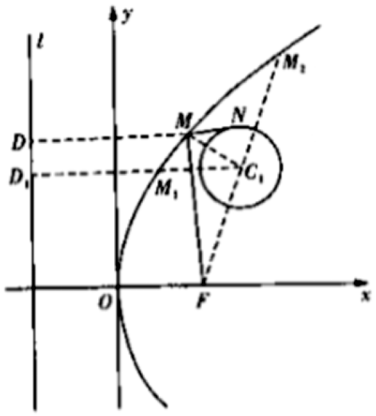
由图可得方程$f\left(x\right)=\dfrac{2}{3}$和$f\left(x\right)=2$共有 5 个根，即函数$g\left(x\right)=3f^2\left(x\right)-8f\left(x\right)+4$有 5 个零点.

12.【解析】由已知得：$C_1\left(3,2\sqrt{2}\right),F\left(2,0\right)$，记$C_2$的准线为$l$，如图，过点$M$作$l$的垂线，垂足为$D$，过点$C_1$作$l$的垂线，垂中为$D_1$，则

$|MF|+|MN|=|MD|+|MN|\geqslant|MD|+\left|MC_1\right|-1\geqslant\left|C_1D_1\right|-1$，当且仅当$M,C_1,D$三点共线，且点$N$在线段$MC_1$上时等号成立，此时$\left|MF\right|+\left|MN\right|$取得最小值，则点$M_1$的坐标为$\left(1,2\sqrt{2}\right)$，$|MF|-|MN|\leqslant|MF|-\left(\left|MC_1\right|-1\right)=|MF|-\left|MC_1\right|+1\le\left|FC_1\right|+1$，当且仅当点$M$为线段$FC_1$的延长线与抛物线的交点，且点$N$在线段$MC_1$上时等号成立，此时$\left|MF\right|-\left|MN\right|$取得最大值，又直线$FC_1$的方程为$y=2\sqrt{2}(x-2)$，由$\begin{cases}y=2\sqrt{2}(x-2)\\ y^2=8x\end{cases}$，解

得$\begin{cases}x=1\\y=-2\sqrt{2}\end{cases}$，或$\begin{cases}x=4\\y=4\sqrt{2}\end{cases}$，所以$M_2$的坐标为$(4,4\sqrt{2})$，

所以$|M_1M_2|=\sqrt{(4-1)^2+(4\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2}=\sqrt{17}$.



二、填空题

13．5.25　　14．160　　15．2　　16．$256\sqrt{3}\pi$

13．【解析】由已知得样本点的中心点的坐标为$(4.5,3.5)$，代入$\hat{y}=mx+0.35$，

得$3.5=4.5m+0.35$，即$m=0.7$，所以$\hat{y}=0.7x+0.35$，取$x=7$，得

$\hat{y}=0.7\times7+0.35=5.25$，预测2019年捐赠的现金大约是5.25万元.

14.【解析】∵考试的成绩X服从正态分布$N(105，10^2)$，∴考试的成绩X关于$X=105$对称，∵$P(95\leqslant X\leqslant105)=0.34$，∴$P(X\geqslant115)=\frac{1}{2}(1-0.68)=0.16$，∴该班数学成绩在115分以上的人数为$0.16\times1000=160$.

15.【解析】由题意知原式展开为$2x\cdot(1-x)^4+\frac{1}{x}\cdot(1-x)^4+a(1-x)^4$，所以

$\left(2x+\frac{1}{x}+a\right)(1-x)^4$的展开式中含$x^3$的项为$2x\cdot C_4^2(-x)^2+\frac{1}{x}(-x)^4+aC_4^3(-x)^3$，

即$(13-4a)x^3$，由已知条件知$13-4a=5$，解得$a=2$.

16.【解析】因为$PA\perp PB$，$PA\perp PC$，$PB\cap PC=P$，故$PA\perp$平面PBC，

因为 $PA=PB=PC=8$，故 $AB=AC=8\sqrt{2}$，$\because \cos\angle PAO=\dfrac{PA}{AD}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore AD=\dfrac{3PA}{\sqrt{6}}=\dfrac{3\times 8}{\sqrt{6}}=4\sqrt{6}$，则 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=4\sqrt{2}$ $\because PA\perp$ 平面 PBC，

$BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore BC\perp PA$ $\because PO\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，$\therefore BC\perp PO$.

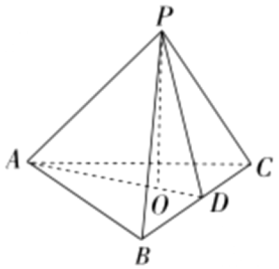
$\because PA\cap PO=P$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAO，$\because PD\subset$ 平面 PAO，$\therefore PD\perp BC$，$\because PB=PC=8$，

$\therefore D$ 为 BC 的中点，$\therefore BC=2BD=8\sqrt{2}$，$\therefore PB^2+PC^2=BC^2$.

故 $PC\perp PB$，构造正方体模型可知，四面体 $P-ABC$ 的外接球半径

$R=\dfrac{\sqrt{PA^2+PB^2+PC^2}}{2}=4\sqrt{3}$，所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为

$V=\dfrac{4}{3}\pi\times\left(4\sqrt{3}\right)^3=256\sqrt{3}\pi$.



三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

17.【解析】

（1）由题意 $\boldsymbol{m}=\left(a,\dfrac{\sqrt{3}}{3}sinA\right)$，$\boldsymbol{n}=\left(cosC,\ c\right)$，$b=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$.

所以 $b=acosC+\dfrac{\sqrt{3}}{3}csinA$，由正弦定理，可得 $sinB=sinAcosC+\dfrac{\sqrt{3}}{3}sinCsinA$，

因为 $B=\pi-(A+C)$，所以 $sinB=sin$（$A+C$）$=sinAcosC+cosAsinC$，

又由 $C\in(0,\pi)$，则 $\sin C>0$，整理得 $\tan A=\sqrt{3}$，

又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ……（6 分）

（2）由(1)和余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

则 $3^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc$，

即 $b^2+c^2-bc=9$，整理得 $(b+c)^2-3bc=9$，

又由 $bc\le(\frac{b+c}{2})^2$（当且仅当 $b=c=3$ 时等号成立）

从而 $9\ge(b+c)^2-3(\frac{b+c}{2})^2=\frac{1}{4}(b+c)^2$，可得 $b+c\le6$，

又 $b+c>a=3$，$\therefore 3<b+c\le6$，从而周长 $L\in(6,9]$. ……（12 分）

18．【解析】

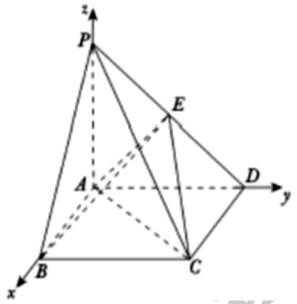
（1）证明：∵底面 $ABCD$ 为正方形，$\therefore BC\perp AB$，

又 $BC\perp PB, AB\cap PB=B$，$\therefore BC\perp$ 平面 PAB，$\therefore BC\perp PA$.

同理 $CD\perp PA, BC\cap CD=C$，$\therefore PA\perp$ 平面 $ABCD$. ……（4 分）

（2）如图，分别以 AB, AD, AP 所在的直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

不妨设正方形的边长为 2.



则 $A(0,0,0), C(2,2,0), E(0,1,1), B(2,0,0)$，则 $\overrightarrow{AE}=(0,1,1), \overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 ABE 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=y+z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2x=0\end{cases}$，令 $y=-1, z=1$，得 $\boldsymbol{m}=(0,-1,1)$.

同理，可得平面 BCE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,0,2)$，

故 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

所以二面角 $A-BE-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. ……（12 分）

19．【解析】

（1）法一：设椭圆C的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

∵一个焦点坐标为$F(1,0)$，∴另一个焦点坐标为$(-1,0)$，

∴由椭圆定义可知$2a=\sqrt{(1+1)^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2}+\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2}=4$，

∴$a=2$，∴$b^2=a^2-c^2=3$，∴椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． ……（4分）

法二：不妨设椭圆C的方程为$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$（$m>n>0$），

∵一个焦点坐标为$F(1,0)$，∴$m-n=1$，①

又∵点$P\left(1,\frac{3}{2}\right)$在椭圆$C$上，∴$\frac{1}{m}+\frac{9}{4n}=1$，②

联立方程①，②，解得$m=4$，$n=3$，∴椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．……（4分）

（2）设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线MN的方程为$x=my+1$，

由方程组$\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$消去$x$，并整理得：$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

∵$\Delta=(6m)^2+36(3m^2+4)>0$，∴$y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$，

∵直线BM的方程可表示为$y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，

将此方程与直线$x=4$联立，可求得点Q的坐标为$\left(4,\frac{2y_1}{x_1-2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AN}=\left(x_2+2,y_2\right)$，$\overrightarrow{AQ}=\left(6,\dfrac{2y_1}{x_1-2}\right)$

$\because 6y_2-\left(x_2+2\right)\cdot\dfrac{2y_1}{x_1-2}=\dfrac{6y_2\left(x_1-2\right)-2y_1\left(x_2+2\right)}{x_1-2}$

$=\dfrac{6y_2\left[\left(my_1+1\right)-2\right]-2y_1\left[\left(my_2+1\right)+2\right]}{\left(my_1+1\right)-2}$

$=\dfrac{4my_1y_2-6\left(y_1+y_2\right)}{my_1-1}=\dfrac{4m\left(-\dfrac{9}{3m^2+4}\right)-6\left(-\dfrac{6m}{3m^2+4}\right)}{my_1-1}=0$，

所以 $\overrightarrow{AN}//\overrightarrow{AQ}$，又向量 $\overrightarrow{AN}$ 和 $\overrightarrow{AQ}$ 有公共点 A，

故 A,N,Q 三点在同一条直线上. ……（12 分）

20．【解析】

（1）由题意可知，甲村中“绝对贫困户”有 $50\times0.24=12$（户），

甲、乙两村的绝对贫困户有 $\left(0.25+0.50+0.75\right)\times0.2\times100=30$（户），可得出如下列联表：

	甲村	乙村	总计
绝对贫困户	12	18	30
相对贫困户	38	32	70
总计	50	50	100

$K^2=\dfrac{100\times\left(12\times32-18\times38\right)^2}{30\times70\times50\times50}=\dfrac{12}{7}<2.706$.

故没有 90%的把握认为绝对贫困户数与村落有关. ……（6 分）

（2）贫困指标在 $\left[0,0.4\right)$ 的贫困户共有 $\left(0.25+0.5\right)\times0.2\times100=15$（户），

“亟待帮助户”共有 $0.25\times0.2\times100=5$（户），依题意 X 的可能值为 0，1，2，3，

$P(X=0)=\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{24}{91}$，$P(X=1)=\frac{C_{10}^2C_5^1}{C_{15}^3}=\frac{45}{91}$，

$P(X=2)=\frac{C_{10}^1C_5^2}{C_{15}^3}=\frac{20}{91}$，$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}$，

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{24}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{20}{91}$	$\frac{2}{91}$

故 $EX=0\times\frac{24}{91}+1\times\frac{45}{91}+2\times\frac{20}{91}+3\times\frac{2}{91}=1$.……（12 分）

21．【解析】（1） 因为 $f(x)=x\ln x-2ax^2+x$，$x>0$，所以 $f'(x)=\ln x+2-4ax$.

$\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，$\therefore f'(x)=\ln x+2-4ax\le 0$ 在 $(0,+\infty)$ 内恒成立，

即 $4a\ge\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}$，则 $g'(x)=\frac{-1-\ln x}{x^2}$，

$\therefore$ 当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 内为增函数；

当 $x>\frac{1}{e}$ 时，$g'(x)<0$，即 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 内为减函数.

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=e$，所以 $4a\ge e$，所以 $a\ge\frac{e}{4}$，则 $a\in\left[\frac{e}{4},+\infty\right)$.

（2）因为函数 $f(x)$ 有两个极值点分别为 x_1，x_2，

则 $f'(x)=\ln x+2-4ax=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两根 x_1，x_2，

则 $\begin{cases}\ln x_1+2-4ax_1=0\\ \ln x_2+2-4ax_2=0\end{cases}$，两式相减，得 $\ln x_1-\ln x_2=4a(x_1-x_2)$.

不妨设$0<x_1<x_2$，

当$a<0$时，$x_1+x_2>\dfrac{1}{2a}$恒成立；

当$a>0$时，要证明$x_1+x_2>\dfrac{1}{2a}$，只需证明$\dfrac{x_1+x_2}{4a\left(x_1-x_2\right)}<\dfrac{1}{2a\left(\ln x_1-\ln x_2\right)}$.

即证明$\dfrac{2\left(x_1-x_2\right)}{x_1+x_2}>\ln x_1-\ln x_2$，即证明$\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}>\ln\dfrac{x_1}{x_2}$，

令$t=\dfrac{x_1}{x_2}$，$t\in(0,1)$，则$h(t)=\dfrac{2(t-1)}{t+1}-\ln t$，

则$h'(t)=\dfrac{-(t-1)^2}{t\left(t+1\right)^2}<0$，所以函数$h\left(t\right)$在$t\in\left(0,1\right)$上单调递减.

所以$h(t)>h(1)=0$，所以$\dfrac{2(t-1)}{t+1}>\ln t$，即$\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}>\ln\dfrac{x_1}{x_2}$成立，

所以$x_1+x_2>\dfrac{1}{2a}$.

综上所述，$x_1+x_2>\dfrac{1}{2a}$.

22．【解析】

（1）由$\rho\left(1-\cos 2\theta\right)=8\cos\theta$得$\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$，

所以$\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$，即$y^2=4x$，

将直线l的参数方程代入$y^2=4x$，得$\left(-1+t\sin\alpha\right)^2=4\left(1+t\cos\alpha\right)$，

即$\sin^2\alpha\cdot t^2-\left(2\sin\alpha+4\cos\alpha\right)\cdot t-3=0$，

由$0<\alpha<\pi$知$\sin^2\alpha>0$，$\Delta=\left(2\sin\alpha+4\cos\alpha\right)^2+12\sin^2\alpha>0$，

故直线l与曲线C有两个公共点. ……（5 分）

（2）由(1)可设方程$\sin^2\alpha\cdot t^2-\left(2\sin\alpha+4\cos\alpha\right)\cdot t-3=0$的两根为$t_1$，$t_2$，

则$t_1+t_2=\dfrac{2\sin\alpha+4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$，$t_1\cdot t_2=\dfrac{-3}{\sin^2\alpha}<0$，

故$\left|\dfrac{1}{|PA|}-\dfrac{1}{|PB|}\right|=\dfrac{\left||PA|-|PB|\right|}{|PA|\cdot|PB|}=\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1\cdot t_2|}=\dfrac{2}{3}|\sin\alpha+2\cos\alpha|=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=4$，即$4\sin\alpha\cos\alpha=3\sin^2\alpha$，

$\therefore\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$.……（10 分）

23.【解析】

（1）当$a=2$时，$f\left(x\right)=|x+2|+|x-1|\geq x+8$等价于

$\begin{cases}x\geq 1\\2x+1\geq x+8\end{cases}$或$\begin{cases}-2\leq x<1\\3\geq x+8\end{cases}$或$\begin{cases}x<-2\\-2x-1\geq x+8\end{cases}$，

解得$x\geq 7$或$x\in\varnothing$或$x\leq -3$，

所以不等式的解集为：$x\in\left(-\infty,-3\right]\cup\left[7,+\infty\right)$.……（4 分）

（2）依题意即$f\left(x\right)=|x+a|+|x-1|\leq|x-5|$在$x\in\left[0,2\right]$时恒成立，

当$x\in\left[0,1\right]$时，$|x+a|+1-x\leq 5-x$，即$|x+a|\leq 4$，

所以$-4-a\leq x\leq 4-a$对$x\in\left[0,1\right]$恒成立，$\therefore\begin{cases}-4-a\leq 0\\1\leq 4-a\end{cases}$，得$-4\leq a\leq 3$；

当$x\in\left(1,2\right]$时，$|x+a|+x-1\leq 5-x$，即$|x+a|\leq 6-2x$，$2x-6\leq x+a\leq 6-2x$

所以$\begin{cases}x\leq\dfrac{6-a}{3}\\x\leq 6+a\end{cases}$对任意$x\in\left(1,2\right]$恒成立，

$\therefore\begin{cases}2\leq\dfrac{6-a}{3}\\2\leq 6+a\end{cases}$，得$\begin{cases}a\leq 0\\a\geq -4\end{cases}$ $\therefore -4\leq a\leq 0$，

综上，$-4 \le a \le 0$.……（10 分）

升祥文化