

2019—2020 学年度高三模拟考试

数学试题参考答案

2020.04

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1-4 ABBC 5-8 DDAC

1. 【答案】A

【解析】由 $z(1+2i)=i$ ，得 $z=\frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{i+2}{5}$ ，

∴复数 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ ，在第一象限，故选 A.

2. 【答案】B

【解析】由 $x^2-2x \leq 0$ ，得 $x \in (0, 2)$ ，所以 $M \cap N = \{1\}$ ，故选答案 B.

3. 【答案】B

【解析】由祖暅原理知：“ $\tilde{S}_1, S_1$ 相等”一定能推出“ V_1, V_2 相等”，反之：若两个同样的圆锥，一个正放，一个倒放，则体积相等，侧面面积不一定相同，故选 B.

4. 【答案】C 【解析】由圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 的圆心到直线 $l: ax - y + 4 = 0$ 的距离 $d \leq 2$ 得，
 $a \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$

5. 【答案】D

【解析】由于 $a > 1$ ，所以 $y = a^{-x} = (\frac{1}{a})^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的递减函数，且过 $(0, 1)$ ； $y = -\log_a x$ 为 $(0, +\infty)$ 上的单调递减函数，且过 $(1, 0)$ ，故选：D.

6. 【答案】D

【解析】当 $x > 0$ 时， $f(x) = x \cdot 2^x = x \cdot 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x + x \cdot \ln 2 \cdot 2^x > 0$ ，函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数. 因为 $f(x)$ 是奇函数所以 $b = -f(\log_3 \frac{1}{2}) = f(-\log_3 \frac{1}{2}) = f(\log_3 2)$ ，
因为 $\ln 3 > 1 > \log_3 \sqrt{5} > \log_3 2 > 0$ ，函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数，所以 $c > a > b$.

7. 【答案】A

【解析】由题意的该等腰三角形的底边平行于 x 轴，且斜边长为函数 $f(x)$ 的最小正周期，
设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 为两函数图像的相邻交点，令 $f(x)=g(x)$ ，可得 $\sin \omega x = \cos \omega x$

再利用 $\sin^2 \omega x + \cos^2 \omega x = 1$ ，解得 $\sin \omega x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \omega x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故该等腰直角三角形的

斜边上的高为 $|y_1 - y_2| = \sqrt{2} |\sin \omega x_1 - \sin \omega x_2| = 2$, 所以该三角形的斜边长为 4, 故 $f(x) = \sqrt{2} \sin \omega x$ 的最小正周期为 4, 即 $\frac{2\pi}{\omega} = 4$, $\omega = \frac{\pi}{2}$ 所以 $f(x) = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi x}{2})$, $g(x) = \sqrt{2} \sin[\frac{\pi(x+1)}{2}]$ 所以只需把 $y = f(x)$ 的图像向左平移 1 个单位得到 $y = g(x)$ 的图像, 故选 A.

8. 【答案】C

【解析】由直角坐标系可知,

$A(1,1), B(-1,2), C(2,3), D(-2,4), E(3,5), F(-3,6)$,

即 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 2, a_5 = 2, a_6 = 3, a_7 = -2, a_8 = 4, \dots$,

由此可知, 数列中偶数项是从 1 开始逐渐递增的, 且都等于其项数除以 2, 每四个数中有一个负数, 且为每组的第三个数, 每组的第一个数为其组数, 每组的第一个数和第三个数是互为相反数, 因为 $2020 \div 4 = 505$, 则 $a_{2019} = -505$, 所以

$a_{2017} = 505, a_{2018} = 1009, a_{2020} = 1010, a_{2017} + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} = 2019$, 故选 C.

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求的, 全部选对得 5 分, 选对但不全的得 3 分, 有选错的得 0 分。

9. ACD 10. AC 11. AC 12. ABD

9. 【答案】ACD

【解析】图 (1) 中体重在区间 $[90,100)$, $[100,110)$, $[110,120)$ 内的人数分别为 8,10,2;

图 (2) 中体重在区间 $[80,90)$, $[90,100)$, $[100,110)$ 内的人数分别为 6,8,6;

故选 ACD

10. 【答案】AC

【解析】由已知只游览甲、乙两个景点, 有 18 人会选择甲, 则选择乙的为 9 人, 则若在甲、乙、丙只游览一个景点时, 选择乙的小于等于 9 人; 若只游览乙、丙两个景点, 有 19 人会选择乙, 则选择丙的为 8 人, 则若在甲、乙、丙只游览一个景点时, 选择丙的小于等于 8 人, 所以选择甲的一定大于等于 10 人, 故选 AC.

11. 【答案】AC

【解析】由已知条件, 构造函数 $g(x) = f(x) - mx$, 则 $g'(x) = f'(x) - m > 0$, 故函数

$g(x) = f(x) - mx$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $\frac{1}{m} > 0$, $g(\frac{1}{m}) > g(0)$, 故 $f(\frac{1}{m}) - 1 > -1$,

$\therefore f(\frac{1}{m}) > 0$, 而 $\frac{1-m}{m} < 0$, $\therefore f(\frac{1}{m}) > \frac{1-m}{m}$, 故 A 正确.

$\frac{1}{m-1} > 0$, 故 $g(\frac{1}{m-1}) > g(0)$, 所以 $f(\frac{1}{m-1}) - \frac{m}{m-1} > -1$, $f(\frac{1}{m-1}) > \frac{1}{m-1}$, 故 C 正确.

12. 【答案】ABD

【解析】设 $l: y = kx + b$, 代入 $x^2 + y^2 = n$ 得 $(1+k^2)x^2 + 2bkx + b^2 - n = 0$, ①

显然 $k \neq \pm 1$, $\Delta = 4b^2k^2 + 4(1-k^2)(b^2+n) > 0$, 即 $b^2 + n(1-k^2) > 0$,

设 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 则 x_1, x_2 是方程①的两个根,

$$\text{有 } x_1 + x_2 = \frac{2kb}{1-k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{-(b^2+n)}{1-k^2},$$

设 $A(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, 由 $\begin{cases} y = kx + b \\ y = x \end{cases}$ 得 $x_3 = \frac{b}{1-k}$;

由 $\begin{cases} y = kx + b \\ y = -x \end{cases}$ 得 $x_4 = \frac{-b}{1+k}$;

所以 $x_3 + x_4 = \frac{2kb}{1-k^2}$, 所以 AD 和 BC 的中点重合, 所以

$|AB| = |CD|$, 所以 $|AC| = |BD|$ 恒成立, 故 A 正确.

因为 AD 和 BC 的中点重合为 P , 所以 $|AB| = |CD|$, 又 $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AOD}$, 所以 $|BC| = \frac{1}{3} |AD|$,

所以 $|AB| = |BC| = |CD|$, 故 B 正确.

当 BC 过点 $(1, 0)$ 且 $BC \perp$ 于 A 点时, $\triangle AOD$ 的面积最小值为 1.

设 AD 与 x 轴交于 N , 过 N 点作 AD 的垂线交渐近线于 E, F 只要三角形 $\triangle AOD$ 面积小于 $\triangle OEF$ 即可, 只要

$$|y_3 - y_4| = \left| \frac{2kb}{1-k^2} \right| > |y_5 - y_6| = \left| \frac{2b}{-k} \right| \text{ 即可, 显然成立, 故 C 错误.}$$

因为 $|AB| = |BC| = |CD|$, 所以 $|BC| = \frac{1}{3} |AD|$, 得

$$\sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{1}{3} \sqrt{1+k^2} |x_3 - x_4|, \text{ 即 } b^2 = \frac{9n}{8} (k^2 - 1) > 0.$$

所以 $n > 0, k^2 > 1$, 又 $|OA| = \sqrt{2} \left| \frac{b}{1-k} \right|$, $|OD| = \sqrt{2} \left| \frac{b}{1+k} \right|$, $\angle AOD = 90^\circ$.

所以 $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} |OA| |OD| = \left| \frac{b^2}{1-k^2} \right| = \frac{9n}{8}$ 是定值, 故 D 正确.

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

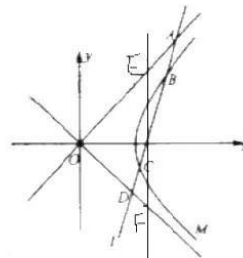
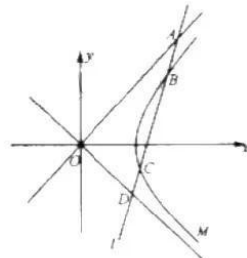
13. -3 14. 15 15. 2; $-\frac{1}{3}$ 16. ①②

13. 【答案】-3

【解析】因为 $m \perp n$, 所以 $-a-3=0$, 即 $a=-3$. 故答案为: -3.

14. 【答案】15

【解析】 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ 展开式通项为 $T_{r+1} = C_6^r (x^2)^{6-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_6^r (-1)^r x^{12-3r}$



令 $12-3r=0$, 得 $r=4$, 所以 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$ 常数项为 $T_5=C_6^4=15$,

所以 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项为 15. 故答案为 15.

15. 【答案】 2; $-\frac{1}{3}$ (本题第一空 2 分, 第二空 3 分.)

【解析】因为抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $F(1,0)$, 所以 $p=2$;

设点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 $l: x=my+1$, 联立方程 $\begin{cases} x=my+1 \\ y^2=4x \end{cases}$,

得 $y^2-4my-4=0$, 所以 $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4$, 所以 $x_1x_2=1$,

$$\text{法一: } \frac{|MF|}{9} - \frac{1}{|NF|} = \frac{x_1+1}{9} - \frac{1}{x_2+1} = \frac{x_1+1}{9} - \frac{1}{\frac{1}{x_1}+1} = \frac{x_1+1}{9} + \frac{1}{x_1+1} - 1 \geq -\frac{1}{3},$$

当且仅当 $x_1+1=3$ 时取等号.

$$\begin{aligned} \text{法二: } \frac{1}{|MF|} + \frac{1}{|NF|} &= \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = \frac{1}{my_1+2} + \frac{1}{my_2+2} = \frac{m(y_1+y_2)+4}{(my_1+2)(my_2+2)} \\ &= \frac{m(y_1+y_2)+4}{m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4} = \frac{4m^2+4}{-4m^2+8m^2+4} = 1, \end{aligned}$$

所以 $\frac{|MF|}{9} - \frac{1}{|NF|} = \frac{|MF|}{9} - (1 - \frac{1}{|MF|}) = \frac{|MF|}{9} + \frac{1}{|MF|} - 1 \geq -\frac{1}{3}$, 当且仅当 $|MF|=3$ 时取等号.

16. 【答案】 ①②

【解析】取 C_1D 的中点 Q_2 , 过点 P 在平面 AB_1C_1D 内作 $PE \perp C_1D$, 再过点 E 在平面 CC_1D_1D 内作 $EQ_1 \perp CD$, 垂足为点 Q_1 .

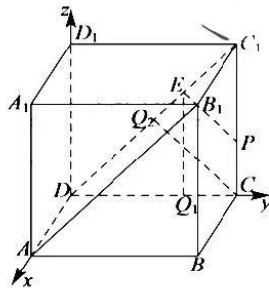
在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD \perp$ 平面 CC_1D_1D ,

$PE \subset$ 平面 CC_1D_1D , $\therefore PE \perp AD$,

又 $\because PE \perp C_1D$, $AD \cap C_1D = D$,

$\therefore PE \perp$ 平面 AB_1C_1D , 即 $PE \perp \beta$, $\therefore f_\beta(P) = E$,

同理可证 $EQ_1 \perp \gamma$, $CQ \perp \beta$, 则 $f_\gamma[f_\beta(P)] = f_\gamma(E) = Q_1$, $f_\beta[f_\gamma(P)] = f_\beta(C) = Q_2$.



以点 D 为坐标原点, DA 、 DC 、 DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐

标系 $D-xyz$, 设 $CP = a$ ($0 < a < 1$), 则 $P(0, 1, a)$, $C(0, 1, 0)$, $E\left(0, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}\right)$,

$Q_1\left(0, \frac{a+1}{2}, 0\right)$, $Q_2\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

对于命题①, $|PQ_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2}$, $\because 0 < a < 1$, 则 $-\frac{1}{2} < a - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, 则

$0 \leq \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$, 所以, $|PQ_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 命题①正确;

对于命题②, $\because CQ_1 \perp \beta$, 则平面 β 的一个法向量为 $\overrightarrow{CQ_1} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{PQ_1} = \left(0, \frac{a}{2}, -a\right)$, $\therefore \overrightarrow{CQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_1} = \frac{1-a}{4} - \frac{a}{2} = \frac{1-3a}{4} = 0$, 解得 $a = \frac{1}{3} \in (0, 1)$,

所以, 存在点 P 使得 $PQ_1 \perp \beta$, 命题②正确;

对于命题③, $\overrightarrow{PQ_2} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1-2a}{2}\right)$, 令 $\overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} = \frac{1-a}{4} + \frac{a(2a-1)}{2} = 0$,

整理得 $4a^2 - 3a + 1 = 0$, 该方程无解, 所以, 不存在点 P 使得 $PQ_1 \perp PQ_2$, 命题③错误.

故正确的结论为: ①②.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

解: (1) 由正弦定理, $c \cos A + a \cos C = a$ 可化为

$\sin C \cos A + \cos C \sin A = \sin A$, 3 分

也就是 $\sin(A+C) = \sin A$.

由 $\triangle ABC$ 中 $A+B+C=\pi$ 可得 $\sin(A+C) = \sin(\pi-B) = \sin B$.

即 $\sin B = \sin A$. 由正弦定理可得 $b=a$, 故 $\frac{a}{b} = 1$ 5 分

(2) 由 $a=1$ 可知 $b=1$, 而 $c=\sqrt{3}$,

由余弦定理可知 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}$ 8 分

又 $0 < C < \pi$ 于是 $C = \frac{2\pi}{3}$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 10 分

18. (12 分)

解析 (1) 若选①因为 $a_n b_{n+1} = nb_n - b_{n+1}$.

当 $n=1$ 时, $a_1b_2=b_1-b_2$, $\because b_1=1, b_2=\frac{1}{3}, \therefore a_1=2$,

又 $\because a_2+a_3=a_3-b_1, \therefore d=3, \dots$ 4分

$\therefore a_n=3n-1, \dots$ 6分

(注: 选其他的两个条件公差皆为 3, 结果一样)

(2) 由 (1) 知: $(3n-1)b_{n+1}=nb_n-b_{n-1}$

即 $3nb_{n+1}=nb_n$,

即数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 以 $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列, $\dots$ 9分

$\therefore \{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - 3^{-n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}$ 12分

19. (12分)

解: (1) 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AD=AB=1, \angle ABC=60^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle CDA = 120^\circ, \angle ADB = 30^\circ, \angle CDB = 90^\circ$,

即 $BD \perp CD$. 2分

又 $\because$ 平面 $BDEF \perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $BDEF \cap$ 平面 $ABCD = BD, CD \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore CD \perp$ 平面 $BDEF$ 4分

$\because CD \subset$ 平面 CDE ,

$\therefore$ 平面 $CDE \perp$ 平面 $BDEF$ 5分

(2) 由 (1) 知, 分别以直线 DB, DC, DE 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,

在 $\triangle ABD$ 中, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}$,

在 $Rt\triangle BCD$ 中, 得 $BC=2$

设 $EM = m (0 \leq m \leq \sqrt{3})$, 则

$B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 0)$,

$M(m, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$,

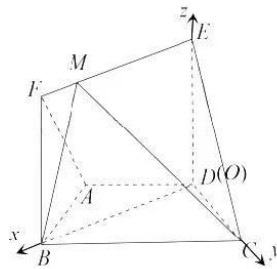
$\overrightarrow{BM} = (m - \sqrt{3}, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{DB} = (\sqrt{3}, 0, 0)$

设平面 BMC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0 \\ (m - \sqrt{3})x + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$$

令 $x = \sqrt{3}$, 则 $y = 3, z = \sqrt{3} - m$,

平面 BMC 的一个法向量为



设 BD 与平面 BCM 所成角为 θ ,

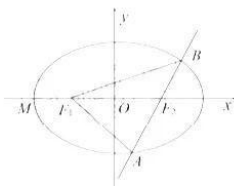
$$\therefore \text{当 } m=0 \text{ 时取最小值 } \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 当 } m=\sqrt{3} \text{ 时取最大值 } \frac{1}{2}$$

解: (1) 由已知椭圆 C 方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

设椭圆上的点为 $F_1(c, 0)$, 由 F_1 到直线 $3x - 4y + 12 = 0$ 的距离等于 $a + c$,

$$\angle MF_1 = \frac{1}{2} \angle F_1 F_2, \quad 2c = a.$$

又 $a^2 = b^2 + c^2$, 求得 $a^2 = 4$, $b = 3$.



(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 设 $\triangle F_1AB$ 的内切圆半径为 r .

$$\Delta F_1AB \text{ 的周长为 } |AF_1| + |AF_2| + |BF_1| + |BF_2| = 4a = 8,$$

根据题意, 直线 l 的斜率不为零, 可设直线 l 的方程为 $x = mv + 1$,

$$\Delta = (6m)^2 + 36(3m^2 + 4) > 0, m \in \mathbf{R},$$

所以 $S_{AF_1AB} = \frac{1}{2} |F_1 F_2| |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{12\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4}$, 9 分

令 $t = \sqrt{m^2 + 1}$, 则 $t \geq 1$, 所以 $S_{\triangle F_1AB} = \frac{12t}{3t^2 + 1} = \frac{4}{t + \frac{1}{3t}}$,

令 $f(t) = t + \frac{1}{3t}$, 则当 $t \geq 1$ 时, $f'(t) = 1 - \frac{1}{3t^2} > 0$, $f(t) = t + \frac{1}{3t}$ 单调递增,

所以 $f(t) \geq f(1) = \frac{4}{3}$, $S_{\triangle F_1AB} \leq 3$,

即当 $t=1, m=0$, 直线 l 的方程为 $x=1$ 时, $S_{\triangle F_1AB}$ 的最大值为 3, 此时内切圆半径最大 $r = \frac{3}{4}$,

$\triangle F_1AB$ 内切圆面积有最大值 $\frac{9}{16}\pi$12 分

21. (12 分)

解: (1) 依题意得 $\mu = 35$, $\sigma^2 = 25$, 得 $\sigma = 5$,

植树的棵数 X 在区间 $(30, 35]$ 内的有一次甲箱内摸奖机会, 中奖率为 $1 - \frac{5}{10} = 0.5$,

植树棵数在区间 $(30, 35]$ 内的人数约为: $200 \times P(\mu - \sigma < X \leq \mu) = 200 \times \frac{0.6827}{2} \approx 68$ 人

中奖的人数约为: $68 \times 0.5 = 34$ 人.3 分

(2) 中奖金额 Y 的可能取值为 0, 50, 100, 150, 200.

$P(Y=0) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$;

$P(Y=50) = 2 \times 0.3 \times 0.5 = 0.3$;

$P(Y=100) = 2 \times 0.5 \times 0.2 + 0.3 \times 0.3 = 0.29$;

$P(Y=150) = 2 \times 0.2 \times 0.3 = 0.12$;

$P(Y=200) = 0.2 \times 0.2 = 0.04$;7 分

故 Y 的分布列为

Y	0	50	100	150	200
P	0.25	0.3	0.29	0.12	0.04

(3) $\because a+b=5$, $\therefore$ 甲箱摸一次所得奖金的期望为

$E_1 = 100 \times \frac{a}{10} + 50 \times \frac{b}{10} = 10a + 5b = 25 + 5a$,

方法一所得奖金的期望值为 $3E_1 = 75 + 15a$;10 分

乙箱摸一次所得奖金的期望为 $E_2 = 100 \times 0.4 + 50 \times 0.6 = 70$,

方法二所得奖金的期望值为 140,

$\because a$ 的值可能为 1, 2, 3, 4,

$\therefore 3E_1 = 75 + 15a \leq 135 < 140$

所以这位顾客选方法二所得奖金的期望值较大.

.....12 分

22. (12分)

解: (1) 将 $x = -\frac{1}{2}$ 代入切线方程 $(e-1)x + ey + \frac{e-1}{2} = 0$ 中, 得 $y = 0$,

所以 $f(-\frac{1}{2}) = 0$, 又 $f(-\frac{1}{2}) = (b - \frac{1}{2})(\frac{1}{e} - a) = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ 或 $a = \frac{1}{e}$,

又 $f'(x) = e^{2x}(2x + 2b + 1) - a$, 所以 $f'(-\frac{1}{2}) = \frac{2b}{e} - a = -\frac{e-1}{e} = -1 + \frac{1}{e}$,

若 $a = \frac{1}{e}$, 则 $b = \frac{2-e}{2}$ (舍去);

所以 $b = \frac{1}{2}$, 则 $a = 1$; 3分

(2) 由 (1) 可知 $a = 1, b = \frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = (x + \frac{1}{2})(e^{2x} - 1)$.

令 $f(x) = 0$, 得 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = 0$,

故曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴有异于原点的唯一交点 P 为 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 4分

曲线在点 $P(-\frac{1}{2}, 0)$ 处的切线方程为 $y = h(x)$, 则 $h(x) = f'(-\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$,

因为 $F(x) = f(x) - h(x)$, 所以 $F(x) = f(x) - f'(-\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$,

所以 $F'(x) = f'(x) - f'(-\frac{1}{2}) = 2e^{2x}(x+1) - \frac{1}{e}, F'(-\frac{1}{2}) = 0$.

若 $x < -1$, $F'(x) < 0$,

若 $x \in (-1, -\frac{1}{2})$, $x+1 \in (0, \frac{1}{2})$, $e^{2x} \in (\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e})$, 所以 $2(x+1)e^{2x} \in (0, \frac{1}{e})$,

$F'(x) = 2e^{2x}(x+1) - \frac{1}{e} < 0$

若 $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$, $x+1 \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, $e^{2x} \in (\frac{1}{e}, +\infty)$, $2(x+1)e^{2x} \in (\frac{1}{e}, +\infty)$,

$F'(x) > 0$, 所以 $y = F(x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

$F'(-\frac{1}{2}) = 0$, 函数 $y = F(x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $F(x)_{\min} = F(-\frac{1}{2}) = 0$ 8分

(3) $h(x) = (\frac{1}{e} - 1)(x + \frac{1}{2})$, 设 $h(x) = m$ 的根为 x'_1 , 则 $x'_1 = -\frac{1}{2} + \frac{me}{1-e}$,

又 $y = h(x)$ 单调递减, 由 (2) 知 $f(x) \geq h(x)$ 恒成立.

又 $m = h(x'_1) = f(x'_1) \geq h(x_1)$, 所以 $x'_1 \leq x_1$,

设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = t(x)$, 则 $t(x) = x$,

令 $T(x) = f(x) - t(x) = (x + \frac{1}{2})(e^{2x} - 1) - x$,

$T'(x) = 2(x+1)e^{2x} - 2$,

当 $x \leq -1$ 时, $T'(x) = 2(x+1)e^{2x} - 2 \leq -2 < 0$,

当 $x > -1$ 时, $T''(x) = 2(2x+3)e^{2x} > 0$,

故函数 $y = T'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $T'(0) = 0$,

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $T'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $T'(x) > 0$,

所以函数 $y = T(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

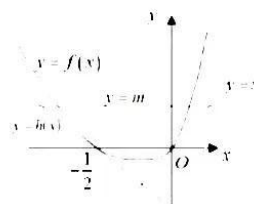
所以 $T(x) \geq T(0) = 0$, 即 $f(x) \geq t(x)$,

设 $t(x) = m$ 的根为 x'_2 , 则 $x'_2 = m$,

又函数 $y = t(x)$ 单调递增, 故 $m = t(x'_2) = f(x'_2) \geq t(x_2)$, 故 $x'_2 \geq x_2$.

又 $x'_1 \leq x_1$, 所以 $x_2 - x_1 \leq x'_2 - x'_1 = m - (-\frac{1}{2} + \frac{me}{1-e}) = \frac{1+2m}{2} - \frac{me}{1-e}$.

12 分



自主招生在线创始于 2014 年，是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站(www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案（更新下载中），点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html>