

# 2023年普通高等学校招生全国统一考试·仿真模拟卷

## 数 学(二)

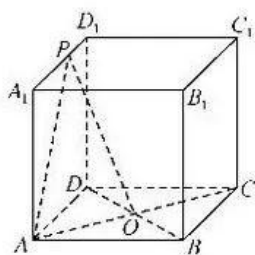
### 注意事项:

1. 本卷满分150分,考试时间120分钟。答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | x' \leq x\}$ ,  $B = \{x | y = \log_2(x-1)\}$ , 则  $A \cup B =$   
 A.  $[-1, +\infty)$       B.  $[0, +\infty)$       C.  $(0, 1)$       D.  $[0, 1]$
2. 已知复数  $z = (a+2i)(1-i)$  为纯虚数, 则实数  $a =$   
 A.  $-\frac{1}{2}$       B.  $-\frac{2}{3}$       C. 2      D. -2
3. 在正方形  $ABCD$  中,  $M$  是  $BC$  的中点. 若  $\vec{AC} = m$ ,  $\vec{AM} = n$ , 则  $\vec{BD} =$   
 A.  $4m - 3n$       B.  $4m + 3n$   
 C.  $3m - 4n$       D.  $3m + 4n$
4. 已知  $a = 0.5^4$ ,  $b = \log_5 0.4$ ,  $c = \log_{0.5} 0.4$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是  
 A.  $b > a > c$       B.  $a > c > b$   
 C.  $c > a > b$       D.  $a > b > c$
5. 端午佳节, 人们有包粽子和吃粽子的习俗. 四川流行四角状的粽子, 其形状可以看成是一个正四面体. 广东流行粽子里放蛋黄, 现需要在四角状粽子内部放入一个蛋黄, 蛋黄的形状近似地看成球, 当这个蛋黄的表面积是  $9\pi$  时, 则该正四面体的高的最小值为  
 A. 4      B. 6      C. 8      D. 10
6. 现有一组数据  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ , 若将这组数据随机删去两个数, 则剩下数据的平均数大于4的概率为  
 A.  $\frac{5}{14}$       B.  $\frac{3}{14}$       C.  $\frac{2}{7}$       D.  $\frac{1}{7}$

7. 在棱长为 3 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $O$  为  $AC$  与  $BD$  的交点,  $P$  为  $A_1D_1$  上一点, 且  $\overrightarrow{A_1P} = 2\overrightarrow{PD_1}$ , 则过  $A, P, O$  三点的平面截正方体所得截面的周长为



- A.  $4\sqrt{13}$   
B.  $6\sqrt{2}$   
C.  $2\sqrt{13} + 2\sqrt{2}$   
D.  $2\sqrt{13} + 4\sqrt{2}$

8. 不等式  $e^{x-1} \geq ax^4 \ln x + x^5$  对任意  $x \in (1, +\infty)$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是

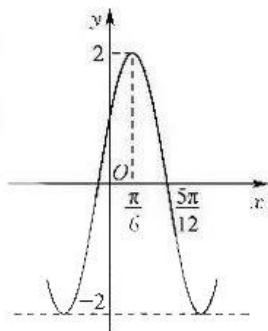
- A.  $(-\infty, 1-e]$       B.  $(-\infty, -4]$       C.  $(-\infty, 2-e^2]$       D.  $(-\infty, -3]$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 在平面直角坐标系中, 圆  $C$  的方程为  $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ , 若直线  $y = x - 1$  上存在一点  $M$ , 使过点  $M$  所作的圆的两条切线相互垂直, 则点  $M$  的纵坐标为

- A. 1      B.  $\sqrt{3}$       C. -1      D.  $-\sqrt{3}$

10. 已知函数  $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 若将  $f(x)$  的图象向右平移  $m$  ( $m > 0$ ) 个单位长度后得到函数  $g(x) = A\sin(\omega x - 2\varphi)$  的图象, 则  $m$  的值可以是



- A.  $\frac{\pi}{4}$       B.  $\frac{\pi}{3}$   
C.  $\frac{4\pi}{3}$       D.  $\frac{9\pi}{4}$

11. 大衍数列来源于《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论, 主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理, 数列中的每一项都代表太极衍生过程. 已知大衍数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 0$ ,

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + n + 1, & n \text{ 为奇数,} \\ a_n + n, & n \text{ 为偶数,} \end{cases} \text{ 则}$$

- A.  $a_3 = 4$       B.  $a_{n+2} = a_n + 2n + 1$   
C.  $a_n = \begin{cases} \frac{n^2-1}{2}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n^2}{2}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$       D. 数列  $\{(-1)^n a_n\}$  的前  $2n$  项和的最小值为 2

12. 已知抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的准线为  $l: x = -2$ , 焦点为  $F$ , 点  $P(x_p, y_p)$  是抛物线上的动点, 直线  $l_1$  的方程为  $2x - y + 2 = 0$ , 过点  $P$  分别作  $PA \perp l$ , 垂足为  $A$ ,  $PB \perp l_1$ , 垂足为  $B$ , 则

- A. 点  $F$  到直线  $l_1$  的距离为  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$       B.  $x_p + 2 = \sqrt{(x_p - 2)^2 + y_p^2}$   
C.  $x_p + \frac{2}{y_p^2 + 1}$  的最小值为 1      D.  $|PA| + |PB|$  的最小值为  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知  $\sin \alpha + 3\cos \alpha = 0$ , 则  $\tan 2\alpha =$  \_\_\_\_\_.

14. 函数  $f(x) = \ln(2x+1) + x - 1$  的图象在点  $(0, f(0))$  处的切线方程是 \_\_\_\_\_.

15. 2 名老师带着 8 名学生去参加数学建模比赛,先要选 4 人站成一排拍照,且 2 名老师同时参加拍照时两人不能相邻,则 2 名老师至少有 1 人参加拍照的排列方法有 \_\_\_\_\_ 种.(用数字作答)

16. 已知  $A, B$  是双曲线  $C: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$  上的两个动点,动点  $P$  满足  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ ,  $O$  为坐标原点,直线  $OA$  与直线  $OB$  斜率之积为 2,若平面内存在两定点  $F_1, F_2$ ,使得  $||PF_1| - |PF_2||$  为定值,则该定值为 \_\_\_\_\_.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在  $\triangle ABC$  中,角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ ,  $(a-c)(a+c) + b(b-a) = 0$ .

(1) 求  $C$ ;

(2) 若  $c = \sqrt{3}$ ,  $\triangle ABC$  的面积是  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

18. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 + \frac{1}{2^3}a_3 + \dots + \frac{1}{2^n}a_n = n (n \in \mathbf{N}^+)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

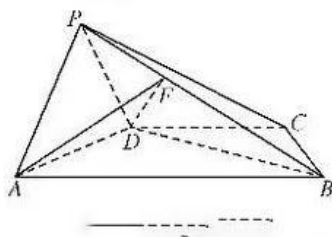
(2) 若  $b_n = (2n-1)a_n$ , 记  $S_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和, 求  $S_n$ , 并证明: 当  $n \geq 2$  时,  $S_n > 6$ .

19. (12 分)

如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中, 平面  $APD \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\triangle APD$  为正三角形, 底面  $ABCD$  为等腰梯形,  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 2CD = 2BC = 4$ .

(1) 求证:  $BD \perp$  平面  $APD$ ;

(2) 若点  $F$  为线段  $PB$  上靠近点  $P$  的三等分点, 求二面角  $F-AD-P$  的大小.



【2023 仿真模拟卷·数学(二) 第 3 页(共 4 页)】

20. (12分)

为落实体育总局和教育部发布的《关于深化体教融合,促进青少年健康发展的意见》,某校组织学生参加100米短跑训练.在某次短跑测试中,抽取100名女生作为样本,统计她们的成绩(单位:秒),整理得到如图所示的频率分布直方图(每组区间包含左端点,不包含右端点).

(1)估计样本中女生短跑成绩的平均数;(同一组的数据用该组区间的中点值为代表)

(2)由频率分布直方图,可以认为该校女生的短跑成绩

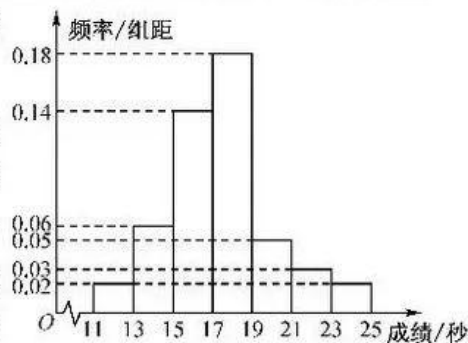
$X$ 服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,其中  $\mu$  近似为女生短跑

平均成绩  $\bar{x}$ ,  $\sigma^2$  近似为样本方差  $s^2$ ,经计算得  $s^2 =$

6.92,若从该校女生中随机抽取10人,记其中短跑

成绩在  $[12.14, 22.66]$  以外的人数为  $Y$ ,求

$P(Y \geq 1)$ .



附参考数据:  $\sqrt{6.92} \approx 2.63$ , 随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) =$

$0.6827$ ,  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$ ,  $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9974$ ,  $0.6827^{10} \approx$

$0.0220$ ,  $0.9545^{10} \approx 0.6277$ ,  $0.9974^{10} \approx 0.9743$ .

21. (12分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F$ , 右顶点为  $A$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $B$  为椭圆  $C$  上

动点,  $\triangle FAB$  面积的最大值为  $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ .

(1)求椭圆  $C$  的方程;

(2)经过  $F$  且不垂直于坐标轴的直线  $l$  与  $C$  交于  $M, N$  两点,  $x$  轴上点  $P$  满足  $|PM| = |PN|$ , 若  $|MN| = \lambda |FP|$ , 求  $\lambda$  的值.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = \ln x - m \cdot \frac{x-1}{x+1} (m \in \mathbf{R})$ .

(1)当  $m=1$  时,判断函数  $f(x)$  的单调性;

(2)当  $x > 1$  时,  $f(x) > 0$  恒成立,求实数  $m$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线  
微信号: zizzsw



自主选拔在线  
微信号: zizzsw



自主选拔在线  
微信号: zizzsw