

巴蜀中学 2024 届高三适应性月考卷 (三)

数 学

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效
3. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回. 满分 150 分, 考试用时 120 分钟.

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{x | x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = 4m + 1, m \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x | x = 4n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{x | x = 4t + 3, t \in \mathbb{Z}\}$, 若 $a \in B$, $b \in C$, 则下列说法正确的是
A. $a + b \in A$ B. $a + b \in B$ C. $a + b \in C$ D. $a + b \in D$
2. 已知 $a - b \in [5, 27]$, $a + b \in [6, 30]$, 则 $7a - 5b$ 的取值范围是
A. $[-24, 192]$ B. $[-24, 252]$ C. $[36, 252]$ D. $[36, 192]$
3. 已知函数 $f(x) = a^{x-1} - 2$ ($a > 0, a \neq 1$) 恒过定点 $M(m, n)$, 则函数 $g(x) = m + x^n$ 的图象不经过
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
4. 已知非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 且满足 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{a}$, 则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为
A. $-\frac{1}{4}\vec{b}$ B. $\frac{1}{2}\vec{b}$ C. $-\frac{1}{2}\vec{b}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{b}$
5. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$), 点 M 在 C 上, 直线 $l: 2x - y + 6 = 0$ 与 x 轴、 y 轴分别交于 A, B 两点, 若 $\triangle AMB$ 面积的最小值为 $\frac{15}{2}$, 则 $p =$
A. 44 B. 4 C. 4 或 44 D. 1 或 4
6. 把二项式 $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^8$ 的所有展开项重新排列, 记有理项都相邻的概率为 p , 有理项两两不相邻的概率为 q , 则 $\frac{p}{q} =$
A. 5 B. $\frac{1}{5}$ C. 4 D. $\frac{1}{4}$

7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $S_5 \leq S_n$ 成立, 则 $\frac{a_8}{a_6}$ 的取值范围是

- A. $(3, +\infty)$ B. $[3, +\infty)$
C. $(-\infty, -3) \cup [3, +\infty)$ D. $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 导函数为 $f'(x)$, 不等式 $(x+1)[2f(x)+xf'(x)] > xf(x)$ 恒成立, 且 $f(6) = \frac{7}{12}$, 则不等式 $f(x+4) < \frac{3x+15}{(x+4)^2}$ 的解集为

- A. $(-\infty, 4)$ B. $(0, 2)$
C. $(-4, 2)$ D. $(-4, 4)$

二、多项选择题 (本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每个给出的四个选项中, 有多项是满足要求的, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 分别经过以下选项中的图象变换之后, 能得到函数 $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象的是

- A. 先将 $y = \cos x$ 的图象上各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{3}$, 再将图象关于 x 轴翻折
B. 先将 $y = \sin x$ 的图象上各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{3}$, 再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
C. 先将 $y = \sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再将各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{3}$
D. 先将 $y = \cos x$ 的图象向左平移 π 个单位长度, 再将各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{3}$

10. 已知向量 $\vec{m} = \left(2, \frac{1}{a}\right)$, $\vec{n} = \left(\frac{1}{b}, 4\right)$, 其中 $a > 0$, $b > 0$, 则下列说法正确的是

- A. 若 $\vec{m}, \vec{n}$ 可以作为平面向量的一组基底, 则 $\log_2 ab \neq -3$
B. 若 $\vec{m} \perp \vec{n}$, 则 $2^{2a+b} = 1$
C. 若 $a+b=1$, 则 $\vec{m} \cdot \vec{n}$ 有最小值 $6+4\sqrt{2}$
D. 若 $|\vec{m}| = |\vec{n}| > 4\sqrt{2}$, 则 $\frac{b}{a} \in \left(1, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = x \sin x - \lambda \cos x (\lambda > -1)$, 记 $f(x)$ 在 $[-k\pi, k\pi] (k \in \mathbf{N}_+)$ 上的极值点为 $x_1, x_2, \dots, x_n (x_1 < x_2 < \dots < x_n)$ 共 n 个, 则下列说法正确的是

- A. $n = 2(k+1)$
B. $x_{k+1} = 0$
C. 当 $k=1$ 时, 对任意 $\lambda > -1$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 均为等差数列
D. 当 $k=2$ 时, 存在 $\lambda > -1$, 使得 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为等差数列

12. 已知函数 $f(x) = a^{|x|} - |\log_a |x||$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 则下列说法正确的是
- A. 若函数 $y = f(x)$ 有 4 个零点, 则 $0 < a < 1$
- B. 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = f(x)$ 有 4 个零点
- C. 若函数 $y = f(x)$ 有 2 个零点, 则 $a > 1$
- D. 当 $a > 1$ 时, 函数 $y = f(x)$ 有 2 个零点

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

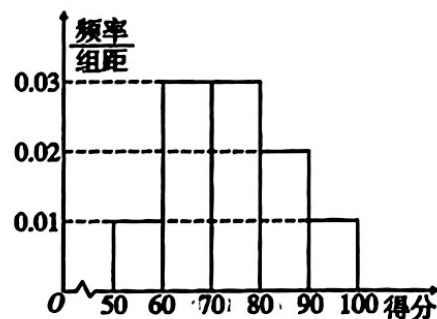
13. 已知在等比数列 $\{a_n\}$ 中, a_2, a_{10} 是方程 $x^2 - 13x + 14 = 0$ 的两个实数根, 则 $a_6 =$ _____.
14. 已知 $F_1(0, -c), F_2(0, c)$ 是双曲线 $E: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的下、上焦点, 直线 $y = x + c$ 与 x 轴交于 A 点, 与双曲线的渐近线在第三象限内交于 B 点, 且 $\overrightarrow{F_1F_2} + \overrightarrow{F_1B} = 2\overrightarrow{F_1A}$, 则双曲线的渐近线方程为 _____.
15. 已知函数 $f(x)$ 满足: ① $f(x)$ 的图象过点 $(8, \frac{3}{2})$; ② $f(x)$ 是偶函数; ③ 对任意的非零实数 $x_1, x_2, f(\frac{x_1}{x_2}) = f(x_1) - f(x_2)$. 请写出一个满足上述条件的函数 $f(x) =$ _____.
16. 在三角函数部分, 我们研究过二倍角公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, 我们还可以用类似方式继续得到三倍角公式. 根据你的研究结果解决如下问题: 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $A \leq \frac{\pi}{3}, \cos C + 4\cos^3 A - 3\cos A = 0$, 则 $4\tan A + \frac{1}{\tan(B-A)}$ 的取值范围是 _____.

四、解答题 (共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

2023 年 9 月 23 日, 第 19 届亚洲运动会在杭州正式开幕. 这是 1990 年第 11 届北京亚运会、2010 年第 16 届广州亚运会之后, 中国第三次主办亚运盛会, 也进一步激发了中国全民参与体育活动的热情. 为调查学生对亚运会相关知识的了解情况, 某中学进行了亚运会知识问答测试, 将得分在 70 分及以上的学生称为“亚运迷”. 现将该学校参与知识问答活动的学生的得分 (满分 100 分) 进行了统计, 得到如下的频率分布直方图:

- (1) 估计该学校学生参与知识问答测试的得分的中位数 (结果保留一位小数);
- (2) 按是否为“亚运迷”比例采用分层抽样的方法抽取 5 名学生前往杭州参加亚运志愿者活动, 其中 2 名学生参与宣传工作, 3 名学生参与场务工作. 记参与宣传工作的“亚运迷”的学生人数为 ξ , 求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$.



18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{13} \cos \omega x \cdot \cos(\omega x - \varphi) - \sin^2 \omega x$ ($\omega > 0$), $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\tan \varphi = 2\sqrt{3}$,

$f(x)$ 的最小正周期为 π .

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12}, \varphi\right]$ 上的值域.

19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n^2 + k$, $n \in \mathbf{N}_+$, $k \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a_1 = 1$ 且数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 求实数 k 的取值范围;

(2) 若 $a_1 = 3$ 且 $k = 0$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

20. (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $2a \sin B = \sqrt{3} b$, $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = |\vec{AB}|^2$.

(1) 若 $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, 且 D 与 B 不在直线 AC 的同一侧, $CD = 3AD = 6$, 求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的上、下顶点分别为 A, B , 左顶点为 D , $\triangle ABD$ 是

面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过椭圆外一点 $M(m, 0)$ 的直线交椭圆于 P, Q 两点, 已知点 P 与点 P' 关于 x 轴对称, 直线 $P'Q$ 与 x 轴交于点 K ; 若 $\angle AKB$ 是钝角, 求 m 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = a \cos x$.

(1) 求证: $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) < 1$;

(2) 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f(x) > g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $[f(x)]^2 > g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.