高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合与常用逻辑用语、函数、导数、三角函数、解三角形、平面向量、复数、数列、不等式、推理与证明。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集$U=\{x\in\mathbf{Z}|x^2\leqslant 4\}$，集合$A=\left\{y\middle|y=\sin\frac{n\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$，则$\complement_U A=$

A. $[-2,-1)\cup(1,2]$　　B. $(1,2]$

C. $\{-2,2\}$　　D. $\{-2,0,2\}$

2. 已知复数z满足$(z-1)(1+i)=2i$，则在复平面上z所对应的点位于

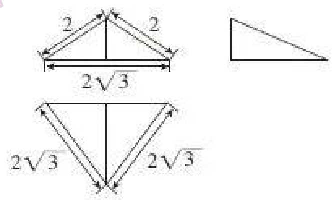
A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d，若$a_1=4,3a_1+4d=0$，则$a_6=$

A. -11　　B. 11　　C. -22　　D. 22

4. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为



A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

5. 已知$a<0<b$，则

A. $a^2<ab$　　B. $a^2<b^2$

C. $a^2>b^2$　　D. $ab<b^2$

6. 已知S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_4=6,S_8=18$，则$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=$

A. 96　　B. 162　　C. 243　　D. 486

7. 设$x\in\mathbf{R},a<b$，若“$a\leqslant x\leqslant b$”是“$x^2+x-2\leqslant 0$”的充分不必要条件，则$b-a$的取值范围为

A. $(0,2)$　　B. $(0,2]$

C. $(0,3)$　　D. $(0,3]$

8. 牛顿曾经提出了常温环境下的温度冷却模型：$\theta=(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}+\theta_0$，其中 t 为时间(单位：min)，θ_0 为环境温度，θ_1 为物体初始温度，θ 为冷却后温度. 假设在室内温度为 20 ℃的情况下，一杯饮料由 100 ℃降低到 60 ℃需要 20 min，则此饮料从 60 ℃降低到 40 ℃需要 来源：高三答案公众号

A. 10 min　　B. 20 min　　C. 30 min　　D. 40 min

9. 大学生小徐、小杨、小蔡通过招聘会被某市教育局录取并分配到该市的一中、二中、三中去任教，这三所学校每所学校分配一名老师，具体谁被分配到哪所学校还不清楚. 他们三人任教的学科是语文、数学、英语，且每个学科一名老师，现知道：(1)小徐没有被分配到一中；(2)小杨没有被分配到二中；(3)教英语的没有被分配到三中；(4)教语文的被分配到一中；(5)教语文的不是小杨，据此判断到三中任教的人和所任教的学科分别是

A. 小徐　语文　　B. 小蔡　数学

C. 小杨　数学　　D. 小蔡　语文

10. 已知正实数 x,y 满足 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+4=x+y$，则 $x+y$ 的最小值为

A. $2+\sqrt{13}$　　B. $2+\sqrt{14}$

C. $\sqrt{13}-2$　　D. 2

11. 数列$\{a_n\}$中的项按顺序可以排列成右图的形式，第一行 1 项，排 a_1；第二行 2 项，从左到右分别排 a_2，a_3；第三行 3 项，……，依此类推. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则满足 $S_n>2\ 000$ 的最小正整数 n 的值为

4，
4，4×3，
4，4×3，4×3²，
4，4×3，4×3²，4×3³，
…

A. 20　　B. 21

C. 26　　D. 27

12. 设实数 $m>0$，若对任意的 $x\geqslant e$，不等式 $x^2\ln x-me^{\frac{m}{x}}\geqslant 0$ 恒成立，则 m 的最大值是

A. $\frac{1}{e}$　　B. $\frac{e}{3}$　　C. 2e　　D. e

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，$\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $k=$__________.

14. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x+y-2\leqslant 0,\\ x-2y\leqslant 0\end{cases}$ 且目标函数 $z=kx+y$ 可以在点 $\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$ 处取到最大值，则 k 的取值范围是__________.

15. 将函数 $f(x)=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则函数 $y=f(x)g(x)$ 的最大值为__________.

16. 斐波那契数列，又称黄金数列，指的是 1，1，2，3，5，8，13，21，34，…，在现代物理、准晶体结构等领域都有直接应用. 对斐波那契数列，其递推公式为：$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. 已知 S_n 为斐波那契数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_{2\,024}=p$，则 $S_{2\,022}=$__________.(结果用 p 表示)

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知实部和虚部均为整数的复数 z 满足 $z+\frac{10}{z}$ 为实数，且 $z+\frac{10}{z}\in(1,6]$，求 z.

18.（本小题满分 12 分）

已知 a,b,c 分别为△ABC 内角 A,B,C 的对边，且 $c(\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C)=a\sin B\sin(A+B)$.

(1)求角 C 的大小；

(2)若 $c=\sqrt{5}$，$a+b=\sqrt{11}$，求△ABC 的面积.

19.（本小题满分 12 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $2a_6-S_5=3$，$2S_6-3a_8=9$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=a_n\cdot 2^{n-1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

20.(本小题满分 12 分)

2022 年某开发区一家汽车生产企业计划引进一批新能源汽车制造设备,通过市场分析,全年需投入固定成本 3 000 万元,生产 x(百辆),需另投入成本 $C(x)$万元,且 $C(x)=\begin{cases}10x^2+200x, 0<x<50,\\ 601x+\dfrac{10\ 000}{x}-9\ 000, x\geqslant 50.\end{cases}$ 由市场调研知,每辆车售价 6 万元,且全年内生产的车辆当年能全部销售完.

(1)求出 2022 年的利润 $L(x)$(万元)关于年产量 x(百辆)的函数关系式;(利润=销售额-成本)

(2)2022 年产量为多少百辆时,企业所获利润最大?并求出最大利润.

21.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_1=1$,$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{a_{n+1}}{2}-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)在数列$\{b_n\}$中,$b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$,其前 n 项和为 T_n,证明:$\dfrac{1}{4}\leqslant T_n<\dfrac{1}{3}$.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax+\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1)若直线 $y=3ax-\dfrac{3}{2}$与曲线 $y=f(x)$相切,求实数 a 的值;

(2)若函数 $f(x)$有两个极值点 x_1 与 x_2,且 $x_1<x_2$,求$\dfrac{2f(x_2)+a^2}{2x_1}$的取值范围.

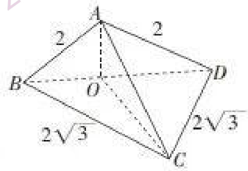
高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. C　因为 $U=\{x\in\mathbf{Z}|x^2\leqslant4\}=\{-2,-1,0,1,2\}$，$A=\{-1,0,1\}$，所以 $\complement_UA=\{-2,2\}$. 故选 C.

2. D　$z=\frac{2i}{1+i}+1=\frac{2i(1-i)}{2}+1=2+i$，所以 $\bar{z}=2-i$，其所对应点为 $(2,-1)$，位于第四象限. 故选 D.

3. A　由 $a_1=4$，$3a_1+4d=0$，得 $d=-3$，所以 $a_6=4+5\times(-3)=-11$. 故选 A.

4. B　由三视图可推知，几何体的直观图如图所示，其中平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$AO=1$，所以三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2\times1=\sqrt{3}$. 故选 B. 来源：高三答案公众号



5. D　对于 A，由 $a<0<b$ 两边同乘以 a，得 $a^2>ab$，故 A 错误；$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，因为 $a<0<b$，所以 $a-b<0$，但 $a+b$ 的符号不确定，故 B，C 错误；对于 D，由 $a<0<b$ 两边同乘以 b，得 $ab<b^2$，故 D 正确. 故选 D.

6. A　因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$，$S_{16}-S_{12}$，$S_{20}-S_{16}$ 成等比数列，$S_4=6$，$S_8=18$，所以 $\frac{S_8-S_4}{S_4}=2$，所以 $S_{20}-S_{16}=6\times2^4=96$. 故选 A.

7. C　设 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$B=\{x|x^2+x-2\leqslant0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant1\}$，由题意可得 $A\subsetneqq B$，所以 $0<b-a<3$. 故选 C.

8. B　由题意可得，$\theta_0=20$，$\theta_1=100$，$\theta=60$，$t=20$ 代入 $\theta=(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}+\theta_0$，$80e^{-20k}+20=60$，解得 $e^{-20k}=\frac{1}{2}$，故 $-20k=-\ln2$，解得 $k=\frac{\ln2}{20}$. 当 $\theta_0=20$，$\theta_1=60$，$\theta=40$，$k=\frac{\ln2}{20}$ 时，将其代入 $\theta=(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}+\theta_0$ 得 $40e^{-kt}+20=40$，解得 $t=20$. 故选 B.

9. C　小徐没有被分配到一中，教语文的被分配到一中，小杨不任教语文，所以只有小蔡被分配到一中任教语文. 小杨没有被分配到二中，也没有被分配到一中，所以只能被分配到三中，且任教数学. 所以只有小徐被分配到二中，且任教英语. 故选 C.

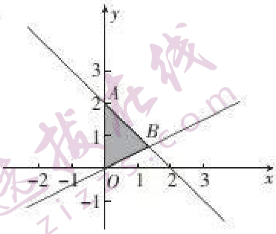
10. A　因为正实数 x、y 满足 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+4=x+y$，等式两边同乘以 $x+y$ 可得 $(x+y)^2=4(x+y)+5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geqslant4(x+y)+5+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}=4(x+y)+9$，所以 $(x+y)^2-4(x+y)-9\geqslant0$，因为 $x+y>0$，解得 $x+y\geqslant2+\sqrt{13}$，当且仅当 $y=2x$ 时，等号成立. 因此 $x+y$ 的最小值为 $2+\sqrt{13}$. 故选 A.

11. B　设满足 $S_n>2\ 000$ 的最小正整数为 n，项 a_n 在图中排在第 i 行第 j 列（$i,j\in\mathbf{N}^*$ 且 $j\leqslant i$），所以有 $S_n=2(3-1)+2(3^2-1)+\cdots+2(3^{i-1}-1)+2(3^j-1)=2(3+3^2+3^3+\cdots+3^{i-1})-2(i-1)+2(3^j-1)=3^i-3-2(i-1)+2(3^j-1)=3^i+2\cdot3^j-2i-3>2\ 000$，则 $i\geqslant6$，$j\geqslant6$，即图中从第 6 行第 6 列开始，和大于 2000，因为前 6 行共有 $1+2+\cdots+6=21$ 项，所以最小正整数 n 的值为 21. 故选 B.

12. D　不等式 $x^2\ln x-me^{\frac{m}{x}}\geqslant0\Leftrightarrow x^2\ln x\geqslant me^{\frac{m}{x}}\Leftrightarrow x\ln x\geqslant\frac{m}{x}e^{\frac{m}{x}}\Leftrightarrow\ln x\cdot e^{\ln x}\geqslant\frac{m}{x}\cdot e^{\frac{m}{x}}$. 设 $f(x)=x\cdot e^x(x>0)$，则 $f'(x)=(x+1)e^x>0$，于是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数. 因为 $\frac{m}{x}>0$，$\ln x>0$，所以 $\frac{m}{x}\leqslant\ln x$，即 $m\leqslant x\ln x$ 对任意的 $x\geqslant e$ 恒成立. 因此只需 $m\leqslant(x\ln x)_{\min}$. 设 $g(x)=x\ln x(x\geqslant e)$，$g'(x)=\ln x+1>0(x\geqslant e)$，所以 $g(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上为增函数，所以 $g(x)_{\min}=g(e)=e$，所以 $m\leqslant e$，即 m 的最大值是 e. 故选 D.

13. $-\frac{9}{2}$　因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，所以 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=\lambda(3\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$，则 $3\lambda=2$，$\lambda k=-3$，所以 $k=-\frac{9}{2}$.

14. $[1,+\infty)$　如图，阴影部分表示不等式组对应的可行域，由 $z=kx+y$，可得 $y=-kx+z$，z 表示直线在 y 轴上的纵截距. 因为 $k_{AB}=-1$，$z=kx+y$ 可以在点 B 处取得最大值，所以 $-k\leqslant -1$，所以 $k\in[1,+\infty)$.



15. $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$　由题可知 $g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，$y=f(x)g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin 2x-\sqrt{2}\cos 2x}{4}=\frac{\sqrt{2}-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{4}$，所以 $y=f(x)g(x)$ 的最大值为 $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

16. $p-1$　因为 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，所以 $a_3=a_1+a_2$，$a_4=a_2+a_3$，$a_5=a_3+a_4$，…，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，将以上 n 个式子两边分别相加，得 $S_{n+2}-a_1-a_2=2S_n-a_1+a_{n+1}$，所以 $S_{n+2}=2S_n+a_2+a_{n+1}$，又 $S_{n+2}=S_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，所以 $S_n+a_{n+1}+a_{n+2}=2S_n+a_2+a_{n+1}$，所以 $S_n=a_{n+2}-1$，所以 $S_{2\,022}=a_{2\,024}-1=p-1$.

17. 解：设 $z=x+yi$，$(x,y\in\mathbf{Z})$，

则 $z+\frac{10}{z}=x+yi+\frac{10}{x+yi}=x+yi+\frac{10(x-yi)}{x^2+y^2}=x\left(1+\frac{10}{x^2+y^2}\right)+y\left(1-\frac{10}{x^2+y^2}\right)i$. ………… 2 分

因为 $z+\frac{10}{z}\in\mathbf{R}$，所以 $y\left(1-\frac{10}{x^2+y^2}\right)=0$. 所以 $y=0$ 或 $x^2+y^2=10$. ………… 4 分

当 $y=0$ 时，$z=x$，又 $1<z+\frac{10}{z}\leqslant 6$，所以 $x>0$，而 $z+\frac{10}{z}\geqslant 2\sqrt{10}>6$，所以在实数范围内无解. ………… 6 分

当 $x^2+y^2=10$ 时，则 $z+\frac{10}{z}=z+\frac{z\cdot\bar{z}}{z}=z+\bar{z}=2x$. 由 $1<2x\leqslant 6$，得 $\frac{1}{2}<x\leqslant 3$，

因为 x，y 为整数，所以 x 的值为 1 或 2 或 3. ………… 8 分

当 $x=1$ 时，$y=\pm 3$；当 $x=2$ 时，$y=\pm\sqrt{6}$（舍）；当 $x=3$ 时，$y=\pm 1$.

则 $z=1\pm 3i$ 或 $z=3\pm i$. ………… 10 分

18. 解：(1)由 $c(\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C)=a\sin B\sin(A+B)$ 及正弦定理，

所以 $c(\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C)=a\sin B\sin C$， ………… 2 分

由正弦定理得 $c(a^2+b^2-c^2)=abc$，即 $a^2+b^2-c^2=ab$， ………… 3 分

所以 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$， ………… 4 分

由余弦定理，得 $\cos C=\frac{1}{2}$， ………… 5 分

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ………… 6 分

(2)由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得 $5=(a+b)^2-2ab-ab$， ………… 8 分

所以 $5=11-3ab$，所以 $ab=2$， ………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………… 12 分

19. 解：(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由已知 $\begin{cases}2a_6-S_5=3,\\ 2S_6-3a_8=9,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2(a_1+5d)-\left(5a_1+\frac{5\times 4}{2}d\right)=3,\\ 2\times\left(6a_1+\frac{6\times 5}{2}d\right)-3(a_1+7d)=9,\end{cases}$ ………… 2 分

化简得$\begin{cases}-3a_1=3,\\9a_1+9d=9,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=-1,\\d=2,\end{cases}$ ……………… 4分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-1+(n-1)\times2=2n-3$. ……………… 5分

(2)由(1)知,$b_n=(2n-3)\times2^{n-1}$, ……………… 6分

所以 $T_n=(-1)\times2^0+1\times2^1+3\times2^2+\cdots+(2n-3)\times2^{n-1}$ ①

则 $2T_n=(-1)\times2^1+1\times2^2+3\times2^3+\cdots+(2n-3)\times2^n$ ② ……………… 8分

由①−②得:$-T_n=(-1)+2\times2^1+2\times2^2+\cdots+2\times2^{n-1}-(2n-3)\times2^n$

$=-1+\frac{2\times2^1-2\times2^{n-1}\times2}{1-2}-(2n-3)\times2^n$

$=-5+2^{n+1}-(2n-3)\times2^n$

$=-5-(2n-5)\times2^n$, ……………… 11分

所以数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=5+(2n-5)\times2^n$. ……………… 12分

20. 解:(1)当$0<x<50$时,

$L(x)=6\times100x-10x^2-200x-3\ 000=-10x^2+400x-3\ 000$; ……………… 3分

当$x\geqslant50$时,

$L(x)=6\times100x-601x-\frac{10\ 000}{x}+9\ 000-3\ 000=6\ 000-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)$. 来源：高三答案公众号

$\therefore L(x)=\begin{cases}-10x^2+400x-3\ 000,0<x<50,\\6\ 000-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right),x\geqslant50.\end{cases}$ ……………… 5分

(2)当$0<x<50$时,$L(x)=-10(x-20)^2+1\ 000$,

$\therefore$当$x=20$时,$L(x)_{\max}=L(20)=1\ 000$; ……………… 8分

当$x\geqslant50$时,$L(x)=6\ 000-\left(x+\frac{10\ 000}{x}\right)\leqslant6\ 000-2\sqrt{x\cdot\frac{10\ 000}{x}}=6\ 000-200=5\ 800$,

当且仅当$x=\frac{10\ 000}{x}$,即$x=100$时,$L(x)_{\max}=L(100)=5\ 800>1\ 000$. ……………… 10分

$\therefore$当$x=100$,即2022年生产100百辆时,该企业获得利润最大,且最大利润为5 800万元. ……………… 12分

21. (1)解:当$n\geqslant2$时,$S_n=\frac{na_{n+1}}{2}-n$,$S_{n-1}=\frac{(n-1)a_n}{2}-(n-1)$,

两式相减得$2a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n-2$, ……………… 2分

整理得$na_{n+1}-(n+1)a_n=2$,即$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,又$\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=1$,

$\frac{a_n}{n}=\left(\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}\right)+\left(\frac{a_{n-1}}{n-1}-\frac{a_{n-2}}{n-2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_3}{3}-\frac{a_2}{2}\right)+\left(\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}\right)+a_1$

$=2\left[\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)\right]+1$, ……………… 4分

则$a_n=3n-2$,当$n=1$时,$a_1=1$,所以$a_n=3n-2$. ……………… 5分

(2)证明:$b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$,

则 $T_n=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$ ………… 8分

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$. ………… 9分

又 $T_{n+1}-T_n=\frac{n+1}{3(n+1)+1}-\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{(3n+4)(3n+1)}>0$,

所以数列$\{T_n\}$单调递增，当 $n=1$ 时，T_n 最小值为$\frac{1}{4}$，又因为 $T_n=\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3+\frac{1}{n}}<\frac{1}{3}$, ………… 11分

所以$\frac{1}{4}\leqslant T_n<\frac{1}{3}$. ………… 12分

22. 解：(1)设切点为$\left(x_0,\frac{1}{2}x_0^2+ax_0+\ln x_0\right)$，因为 $f'(x)=\frac{x^2+ax+1}{x}$，$y=3ax-\frac{3}{2}$与曲线 $y=f(x)$相切，

所以$\begin{cases}\frac{x_0^2+ax_0+1}{x_0}=3a,\\ \frac{1}{2}x_0^{\ 2}+ax_0+\ln x_0=3ax_0-\frac{3}{2},\end{cases}$ ………… 2分

得$\frac{1}{2}x_0^2-\ln x_0-\frac{1}{2}=0$. ………… 3分

令 $h(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x-\frac{1}{2}$，则 $h'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$.

令 $h'(x)>0$，解得 $x>1$，令 $h'(x)<0$，解得 $0<x<1$，故函数 $h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，故 $h(x)_{\min}=h(1)=0$. ………… 4分

所以$\frac{1}{2}x_0^2-\ln x_0-\frac{1}{2}=0$的解为 $x_0=1$. 所以 $a=1$. ………… 5分

(2)因为 $f'(x)=\frac{x^2+ax+1}{x}$，所以 x_1,x_2 是 $x^2+ax+1=0$ 的两个不同的正根，即$\begin{cases}x_1+x_2=-a,\\ x_1\cdot x_2=1,\end{cases}$

故 $a=-x_2-\frac{1}{x_2}$，且 $a<-2$, ………… 7分

所以$\frac{2f(x_2)+a^2}{2x_1}=\frac{\frac{1}{2}(x_2+a)^2+\ln x_2}{\frac{1}{x_2}}=\frac{1}{2x_2}+x_2\ln x_2$. ………… 9分

因为 $x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}>1$, ………… 10分

令 $g(x_2)=\frac{1}{2x_2}+x_2\ln x_2$，则 $g'(x_2)=\frac{-1}{2x_2^2}+\ln x_2+1$ 单调递增，且 $g'(x_2)>g'(1)>0$,

所以 $g(x_2)$在$(1,+\infty)$单调递增，故 $g(x_2)>g(1)=\frac{1}{2}$. ………… 11分

综上所述，$\frac{2f(x_2)+a^2}{2x_1}$的取值范围是$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. ………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。