高三数学试卷参考答案

1. A　$z=\frac{2+3i}{1+i}=\frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$,故 z 的虚部是$\frac{1}{2}$.

2. B　$M=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$,又 $N=\{x|x>1\}$,所以 $M\cap N=\{x|1<x\leqslant 2\}$.

3. C　由题意可得 $f(x)=f(-x)$,则$\frac{ax-1}{x^2+1}=\frac{-ax-1}{x^2+1}$,可得 $a=0$.

4. C　$3a+4b=4\geqslant 2\sqrt{3a\cdot 4b}$,解得 $ab\leqslant\frac{1}{3}$,当且仅当 $a=\frac{2}{3}$,$b=\frac{1}{2}$时,等号成立.

5. D　根据等比数列性质可得 S_4,S_8-S_4,$S_{12}-S_8$ 成等比数列.设 $S_4=m$,则 $S_8=3m$,$S_8-S_4=2m$,$S_{12}-S_8=4m$,$S_{12}=7m$,$\frac{S_4}{S_{12}}=\frac{m}{7m}=\frac{1}{7}$.

6. D　所求概率为 $1-\frac{C_6^2}{C_9^2}=\frac{7}{12}$.

7. B　由题意可得,$Q_0e^{-0.0025t}\leqslant\frac{1}{4}Q_0$,$e^{-0.0025t}\leqslant\frac{1}{4}$,$e^{0.0025t}\geqslant 4$,$0.0025t\geqslant 2\ln 2=1.38$,$t\geqslant 552$.估计臭氧含量减少$\frac{3}{4}$需要 552 年.

8. A　当 $x\in(0,\frac{\pi}{6})$时,$\omega x-\frac{\pi}{4}\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{4})$.因为 $f(x)$在$(0,\frac{\pi}{6})$上单调递增,所以$\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$,解得 $0<\omega\leqslant\frac{9}{2}$.

当 $x\in(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$时,$\omega x-\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{4})$,因为 $0<\omega\leqslant\frac{9}{2}$,所以 $\omega x-\frac{\pi}{4}\subseteq(-\frac{\pi}{4},2\pi)$.

因为 $f(x)$在$(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$上单调递减,所以$\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{\pi}{2}$且$\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}$,解得$\frac{9}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{7}{2}$,又 $0<\omega\leqslant\frac{9}{2}$,所以 ω 的取值范围是$[\frac{9}{4},\frac{7}{2}]$.

9. AB　因为 $a^x=b^{-x}$,所以 $a=\frac{1}{b}$.当 $a>1$ 时,$0<b<1$,A 符合.当 $0<a<1$ 时,$b>1$,B 符合.

10. ABD　设$\{a_n\}$的公差为 d,$2a_n-1-(2a_{n-1}-1)=2(a_n-a_{n-1})=2d(n\geqslant 2)$,所以$\{2a_n-1\}$是以 $2a_1-1$ 为首项,$2d$ 为公差的等差数列,A 正确.$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{(n-1)d}{2}$,所以$\{\frac{S_n}{n}\}$是以 a_1 为首项,$\frac{d}{2}$为公差的等差数列,B 正确.$S_{31}=\frac{31(a_1+a_{31})}{2}=31a_{16}<0$,即 $a_{16}<0$,C 错误.因为 $a_{15}>0$,$a_{16}<0$,所以当 $n=15$ 时,S_n 取得最大值,故对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,恒有 $S_n\leqslant S_{15}$,D 正确.

11. BCD　$f'(x)=\frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$.令 $f'(x)<0$,解得 $0<x<3$ 或 $3<x<6$,令 $f'(x)>0$,解得 $x<0$ 或 $x>6$,所以 $f(x)$在$(0,3)$,$(3,6)$上单调递减,在$(-\infty,0)$,$(6,+\infty)$上单调递增,A 错误.$f(0)=0$,$f'(0)=0$,曲线 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=0$,即曲线 $y=f(x)$与 x 轴相

切,C 正确. $f(x)_{极小值}=f(6)=12$,$f(x)_{极大值}=f(0)=0$,$f(x)$的值域为$(-\infty,0]\cup[12,+\infty)$,D 正确. $f(3-x)+f(3+x)=12$,所以 $f(x)$的图象关于点(3,6)对称,B 正确.

12. BD 对于 A,依次发送红色、黄色、青色信号,则依次显示青色、青色、红色的事件是发送红色信号显示青色、发送黄色信号显示青色、发送青色信号显示红色的 3 个事件的积,它们相互独立,所以所求概率为$(1-\alpha)\beta\gamma$,A 错误;对于 B,两次传输,发送红色信号,相当于依次发送红色、红色信号,则依次显示黄色、黄色的事件是发送红色信号接收黄色信号、发送红色信号接收黄色信号的 2 个事件的积,它们相互独立,所以所求概率为 α^2,B 正确;对于 C,两次传输,发送红色信号,则译码为红色的事件是依次显示黄色、青色或青色、黄色的事件的和,它们互斥,所以所求的概率为 $C_2^1\alpha(1-\alpha)=2\alpha(1-\alpha)$,故 C 错误;对于 D,若采用两次传输,发送红色信号,则译码为青色的概率 $P=(1-\alpha)^2$,若单次传输发送红色信号,则译码为青色的概率 $P'=1-\alpha$,因此 $P-P'=(1-\alpha)^2-(1-\alpha)=-\alpha(1-\alpha)<0$,即 $P<P'$,D 正确.

13. $\frac{37}{40}$ $\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{25+16-4}{2\times5\times4}=\frac{37}{40}$.

14. 2e $f'(x)=(-2x+2)e^x$,当 $x\in[1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,$f(x)\leqslant f(1)=2e$.

15. $\frac{7}{5}$ 因为 $\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{10}$,所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$.

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$,所以 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25}$.

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$. 因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,所以 $\sin\alpha>0$,$\cos\alpha<0$,

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$,故 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$.

16. 120 小猫要从 A 点爬到 C 点,需要先从 A 点爬到 B 点,需要走 3 横 3 竖,则可选的路径共有 $C_6^3=20$ 条,再从 B 点爬到 C 点的路径共 6 条,用分步乘法计数原理可得小猫可以选择的最短路径有 $20\times6=120$ 条.

17. 解:(1)女观众关注该赛事的概率约为$\frac{300}{1000}=30\%$. ………………………… 3 分

(2)零假设为 H_0:是否关注该赛事与性别无关联. ………………………… 4 分

根据列联表中的数据,经计算得到 $\chi^2=\frac{2000\times(600\times700-400\times300)^2}{1000^2\times900\times1100}=\frac{2000}{11}>100>10.828=x_{0.001}$, ………………………… 8 分

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验,推断 H_0 不成立,即认为是否关注该赛事与性别有关联. ………………………… 10 分

18. 解:(1)因为 $A+C=2B$,$A+B+C=\pi$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 2 分

因为 $2\sin(A-B)-\sin C=0$,所以 $2\sin(A-\frac{\pi}{3})=\sin C=\sin(A+\frac{\pi}{3})$, ………………… 3 分

则 $\sin A-\sqrt{3}\cos A=\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$,即 $\sin A=3\sqrt{3}\cos A$, ………………… 4 分

所以 $\tan A=3\sqrt{3}$. …………………………………………………………… 5分

(2) $\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$, $\tan C=-\tan(A+\frac{\pi}{3})=-\frac{\tan A+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan A\cdot\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. ……… 8分

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, $b=7$, 可得 $a=3\sqrt{7}$, $c=2\sqrt{7}$. ……………………………… 10分

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\sqrt{7}\times2\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{21\sqrt{3}}{2}$. …………………………………… 12分

19. 解:(1) 令 $x=y=0$, 可得 $f(0)=-2$. ………………………………………………… 2分

(2) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. ………………………………………………………… 4分

设 $x_1>x_2$, 则 $x_1-x_2>0$,

$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2+x_2)-f(x_2)=f(x_1-x_2)+f(x_2)+2-f(x_2)=f(x_1-x_2)+2$. ………………………………………………………………………… 6分

因为当 $x>0$ 时, $f(x)+2>0$, 所以 $f(x_1-x_2)+2>0$,

则 $f(x_1)-f(x_2)>0$, 即 $f(x_1)>f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. ………………………………………………………… 8分

(3) $f(x)+f(1)+4=f(x+1)-2+4=f(x+1)+2>0$, ………………………………… 10分

即 $f(x+1)>-2=f(0)$, …………………………………………………………………… 11分

所以 $x+1>0$, 解得 $x>-1$.

故原不等式的解集为 $\{x|x>-1\}$. ……………………………………………………… 12分

20. (1) 解:当 $n=1$ 时, $3S_1+a_1=1$, 解得 $a_1=\frac{1}{4}$. ……………………………………………… 1分

当 $n\geqslant2$ 时, $3S_{n-1}+a_{n-1}=1$, 相减得 $3a_n+a_n-a_{n-1}=0$, 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{4}$, ………………… 3分

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{4}$ 为首项, $\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列,

故 $a_n=\frac{1}{4^n}$. …………………………………………………………………………… 5分

(2) 证明: $b_n=\frac{n}{4^n}$.

$T_n=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots+\frac{n}{4^n}$, ①

$\frac{1}{4}T_n=\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\cdots+\frac{n}{4^{n+1}}$. ② ……………………………………………… 7分

①−②得 $\frac{3}{4}T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}-\frac{n}{4^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4^n})}{1-\frac{1}{4}}-\frac{n}{4^{n+1}}=\frac{1}{3}-\frac{3n+4}{3\times4^{n+1}}$. …… 9分

所以 $T_n=\frac{4}{9}-\frac{3n+4}{9\times4^n}$. ……………………………………………………… 10分

$T_n+\frac{b_n}{3}=\frac{4}{9}-\frac{4}{9\times4^n}=\frac{4}{9}(1-\frac{1}{4^n})$.

因为函数 $y=1-\frac{1}{4^x}$在$[1,+\infty)$上单调递增，

所以 $T_n+\frac{b_n}{3}=\frac{4}{9}(1-\frac{1}{4^n})\geqslant\frac{4}{9}\times(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{3}$. ………………………………………… 12 分

21.(1)解:$f'(x)=\frac{1}{2x}-e^x,f'(1)=\frac{1}{2}-e,f(1)=-e$. ……………………………………………… 1 分

曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=(\frac{1}{2}-e)(x-1)-e$,即 $y=(\frac{1}{2}-e)x-\frac{1}{2}$.

……………………………………………………………………………………… 3 分

切线与两坐标轴的交点分别为$(0,-\frac{1}{2}),(\frac{1}{1-2e},0)$.

所求三角形面积为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2e-1}=\frac{1}{8e-4}$. ……………………………………………… 4 分

(2)证明:$f'(x)=\frac{1}{2x}-e^x=\frac{1-2xe^x}{2x}$.

令函数 $g(x)=1-2xe^x(x>0)$,则 $g'(x)=-2(x+1)e^x<0$,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减. ……………………………………………………………………………………… 6 分

$g(0)=1>0,g(\frac{1}{2})=1-\sqrt{e}<0$,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上有且只有一个零点 x_0,使得 $g(x_0)=0$. ……………………………………………………………………………………… 7 分

当 $x\in(0,x_0)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递增;

当 $x\in(x_0,+\infty)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递减.

$f(x)_{\max}=f(x_0)=\frac{1}{2}\ln x_0-e^{x_0}$. ……………………………………………………… 8 分

因为 $g(x_0)=1-2x_0e^{x_0}=0$,所以 $e^{x_0}=\frac{1}{2x_0},x_0=\ln\frac{1}{2x_0}=-\ln(2x_0)=-(\ln 2+\ln x_0)$,即 $\ln x_0=-(x_0+\ln 2)$. ……………………………………………………………… 9 分

$f(x_0)=-\frac{1}{2}(x_0+\ln 2)-\frac{1}{2x_0}=-(\frac{x_0}{2}+\frac{1}{2x_0})-\frac{1}{2}\ln 2\leqslant-2\sqrt{\frac{x_0}{2}\cdot\frac{1}{2x_0}}-\frac{1}{2}\ln 2=-1-\frac{1}{2}\ln 2$,

当且仅当$\frac{x_0}{2}=\frac{1}{2x_0}$,即 $x_0=1$ 时,等号成立. ………………………………………… 11 分

因为 $\ln 2>\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$,所以$-1-\frac{1}{2}\ln 2<-\frac{5}{4}$,即 $f(x)_{\max}=f(x_0)<-\frac{5}{4}$.

故 $f(x)<-\frac{5}{4}$. ………………………………………………………………… 12 分

注:$f(x_0)$也可表示为 $f(x_0)=\frac{1}{2}\ln x_0-\frac{1}{2x_0}$. 因为 $f(x_0)$是增函数,所以 $f(x_0)\leqslant f(\frac{1}{2})=$

$-\frac{1}{2}\ln 2-1<-\frac{1}{2}\ln\sqrt{e}-1=-\frac{5}{4}$.故 $f(x)<-\frac{5}{4}$.

22.解:(1)X 的所有可能取值为 0,1, ………………………………………………… 1分

$P(X=0)=2\times(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2})=\frac{5}{9}$, ………………………………………… 2分

$P(X=1)=\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{9}$, ………………………………………………… 3分

所以 X 的分布列为

X	0	1
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

……………………………………………………………………………………………… 4分

(2)当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=\frac{1}{3}b_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1}+\frac{1}{3}d_{n-1}$. ………………………………………… 5分

当 $n\geqslant 2$ 时,$b_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}c_{n-1}+\frac{1}{6}d_{n-1}$,$c_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}d_{n-1}$,$d_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{6}b_{n-1}$

$+\frac{1}{6}c_{n-1}$, ……………………………………………………………………………… 6分

所以 $b_n+c_n+d_n=a_{n-1}+\frac{2}{3}(b_{n-1}+c_{n-1}+d_{n-1})=a_{n-1}+2a_n$, ………………………… 7分

因为 $a_n=\frac{1}{3}b_{n-1}+\frac{1}{3}c_{n-1}+\frac{1}{3}d_{n-1}$,所以 $3a_{n+1}=b_n+c_n+d_n$,

所以 $3a_{n+1}=2a_n+a_{n-1}$,所以 $3a_{n+1}+a_n=3a_n+a_{n-1}$, ………………………………… 8分

因为 $a_1=0$,$a_2=\frac{1}{3}$,所以 $3a_n+a_{n-1}=1$,所以 $\frac{a_n-\frac{1}{4}}{a_{n-1}-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{3}$. ……………………… 9分

所以 $\{a_n-\frac{1}{4}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{4}$,公比 $q=-\frac{1}{3}$ 的等比数列,

所以 $a_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}$,即 $a_n=-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}+\frac{1}{4}$, ……………………………… 10分

所以 $a_{150}=-\frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^{149}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\times(\frac{1}{3})^{149}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}$,

故经过 150 次传毽子后甲接到毽子的概率大于 $\frac{1}{4}$. ……………………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。