

2023 届高三适应性模拟考试·数学

参考答案、提示及评分细则

1.【答案】B

【解析】因为 $M \cap N = M$, 所以 $M \subseteq N$, 所以 $a \leq -1$, 故选 B.

2.【答案】A

【解析】由题意设 $z = a + bi$ ($a > 0, b > 0$), 由 $|z + \bar{z}| = |2a| = 2$, 得 $a = 1$, 因为 $|z| = 2$, 所以 $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + b^2} = 2$, 解得 $b = \sqrt{3}$, 所以 $z = 1 + \sqrt{3}i$, 所以 $\bar{z} = 1 - \sqrt{3}i$. 故选 A.

3.【答案】C

【解析】因为 AB 中点为 P , 又 $|AB| = 6$, 所以 $|CP| = \sqrt{25 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 4$, 点 P 在以 C 为圆心, 4 为半径的圆上, 其轨迹方程为 $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$. 故选 C.

4.【答案】D

【解析】由题设 $l = h \tan \theta$, “晷影长”分别是“表高”的 $\frac{1}{3}$ 倍和 $\frac{1}{2}$ 倍时, $\tan \theta_1 = \frac{1}{3}, \tan \theta_2 = \frac{1}{2}$,

所以 $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1$, 故选 D.

5.【答案】C

【解析】设圆台的上底面的圆心为 O_1 , 下底面的圆心为 O , 点 A 为上底面圆周上任意一点,

圆台的高为 h , 球的半径为 R , 则 $h = OO_1 = \sqrt{R^2 - O_1A^2} = \sqrt{1 - 1^2} = \sqrt{3}$,

$V = \frac{1}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')h = \frac{1}{3}(4\pi + \sqrt{4\pi \cdot \pi} + \pi) \cdot \sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$, 故选 C.

6.【答案】D

【解析】记第一次抽到红、绿、黄球的事件分别为 A_1, A_2, A_3 , 则 $P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{4}$, 记第二次在红、绿、黄色口袋内抽到黄球的事件分别为 B_1, B_2, B_3 , 而 A_1, A_2, A_3 两两互斥, 其和为 Ω , 所以 $P(B_1|A_1) = \frac{1}{4}, P(B_2|A_2) = \frac{1}{4}, P(B_3|A_3) = \frac{1}{6}$, 记第二次抽到黄球的事件为 B , 则 $P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i B_i) = \sum_{i=1}^3 [P(A_i) \cdot P(B_i|A_i)] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{48}$, 故选 D.

7.【答案】B

【解析】因为双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 得 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以双曲线 Γ 的

渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$, 设直线 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ 的倾斜角为 θ , 则 $\tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

由对称性不妨令点 A, B 分别在第一、四象限, 坐标原点为 O , 则 $\angle AOB = 2\theta$,

于是得 $\sin \angle AOB = \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 而双曲线的虚半轴长为 b , 即 $|OA|$

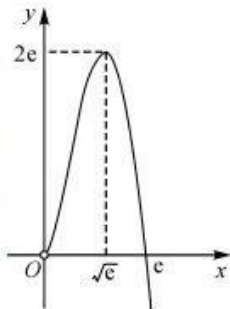
$= |OB| = b$, 显然四边形 $ABCD$ 为矩形, 其面积 $S = 4S_{\triangle AOB} = 4 \times \frac{1}{2} OA^2 \sin \angle AOB = \frac{4\sqrt{2}}{3} b^2 = 12\sqrt{2}$, 得 $b^2 =$

9, 所以 $a^2 = 2b^2 = 18$, 所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{9} = 1$. 故选 B.

8. 【答案】C

【解析】设直线与 $g(x) = x^2$ 的切点为 (x_1, x_1^2) , 由 $g'(x) = 2x$ 可知该直线的斜率为 $2x_1$, 即该直线的方程为 $y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$, 即 $y = 2x_1x - x_1^2$, 设直线与 $f(x) = a \ln x$ 的切点为 $(x_2, a \ln x_2)$, 由 $f'(x) = \frac{a}{x}$ 可知该直线的斜率为 $\frac{a}{x_2}$, 即该直线的方程为 $y - a \ln x_2 = \frac{a}{x_2}(x - x_2)$, 即 $y = \frac{a}{x_2}x + a(\ln x_2 - 1)$, 因为函数 $f(x) =$

$a \ln x (a > 0)$ 和 $g(x) = x^2$ 有且只有一条公切线, 所以 $\begin{cases} 2x_1 = \frac{a}{x_2}, \\ a(\ln x_2 - 1) = -x_1^2, \end{cases}$ 即 $a = 4x_2^2$
 $-4x_2^2 \ln x_2$ 有唯一实根, 令 $h(x) = 4x^2 - 4x^2 \ln x (x > 0)$, 则 $h'(x) = 8x - 8x \ln x - 4x = 4x(1 - 2 \ln x)$, 当 $4x(1 - 2 \ln x) > 0$ 时, $0 < x < \sqrt{e}$, 当 $4x(1 - 2 \ln x) < 0$ 时, $x > \sqrt{e}$, 即 $h(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递增, 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减, 则 $h(x)$ 在 $x = \sqrt{e}$ 处取得最大值, $h(\sqrt{e}) = 4e - 4e \times \frac{1}{2} = 2e$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow 0$, $h(e) = 0$, 函数 $h(x)$ 图象如图



所示, 因为 $a = 4x^2 - 4x^2 \ln x$ 有唯一实根, 所以只有 $a = 2e$, 故选 C.

9. 【答案】BD

【解析】∵ $\frac{f}{2} = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, ∴ $1 - z = \frac{2\pi}{6}$, ∴ $z = \frac{2\pi}{6}$, $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$, $f(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = 1$. 由于 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$, 所以 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$. 所以 A 选项错误, D 选项正确;

$f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$, $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi, x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$, 当 $k = 0$ 时, 得 $x = \frac{\pi}{12}$, 所以 $f(x)$ 关于 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称, C 选项错误;

$-\frac{\pi}{2} + 2k_1\pi < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi, -\frac{\pi}{6} + k_1\pi < x < \frac{\pi}{3} + k_2\pi, k_1 \in \mathbb{Z}$. 当 $k_1 = 1$ 时, 得 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{3}\pi)$ 上递增, 则 $f(x)$ 在区间 $(\pi, \frac{7\pi}{4})$ 上单调递增, 所以 D 选项正确, 故选 BD.

10. 【答案】BCD

【解析】连接 AC 交 BD 于 O 点, 连接 OF, OE, ED,

因为四边形 ABCD 为菱形, 且 $AC \cap BD = O$, 所以 O 为 BD 的中点,

因为 F 为 BD_1 的中点, 所以 $OF \parallel DD_1$, 且 $OF = \frac{1}{2}DD_1$,

在直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $CC_1 \parallel DD_1$, 且 $CC_1 = DD_1$,

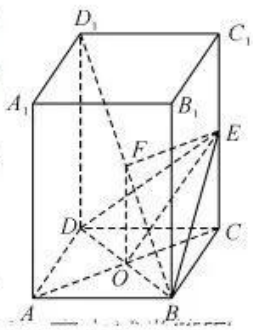
∵ E 为 CC_1 的中点, 则 $CE \parallel DD_1$, 且 $CE = \frac{1}{2}DD_1$, ∴ $OF \parallel CE$, 且 $OF = CE$,

所以四边形 OCEF 为平行四边形, 所以 $EF \parallel OC$, 所以 $\angle BCO$ 为异面直线 EF 与 BC 所成的角或其补角, 由已知底面 ABCD 是边长为 2 的菱形, 且 $\angle BAD = 60^\circ$, 可知 $\angle BCO = 30^\circ$, 故选项 A 错误; 来源: 高三答案公众号

由已知 $OC \perp DB$, 所以 $OC \perp$ 平面 DBD_1 , 所以三棱锥 $D_1 - BDE$ 的体积 $V_{D_1 - BDE} =$

$$V_{E - BDD_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle BDD_1} OC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$
, 故选项 B 正确;

由已知在直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 可得 $EC \perp$ 平面 ABCD, 又 $OC \perp BD$, 所以



$OE \perp BD$, 所以 $\angle EOC$ 为二面角 $E-BD-C$ 的平面角, $\tan \angle EOC = \frac{EC}{OC} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故选项 C 正确;

由已知 $CB=CD=BD=CE=2$, $EC \perp$ 平面 BCD , 设三棱锥 $E-BCD$ 的外接球球心为 O_1 , 外接球半径为 R , 正三角形 BCD 的外心为点 O_2 , 则 $O_1O_2 \perp$ 平面 BCD , 因为 $O_1C=O_1E$, 所以 $O_1O_2 = \frac{1}{2}CE=1$, 所以 $R^2 = O_2C^2 + O_1O_2^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2 = \frac{7}{3}$, 所以三棱锥 $E-BCD$ 的外接球表面积 $S = 4\pi R^2 = \frac{28\pi}{3}$, 故选项 D 正确. 故选 BCD.

11. 【答案】ABD

【解析】 $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \ln x_n$, 令 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$,

当 $x \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 递增; 当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减, 且 $f(1) = 1 + \ln 1 = 1$, $\therefore f(x) \geq 1$,

$\therefore x_1 \in (0, 1)$, $\therefore x_2 = f(x_1) > 1$, $x_3 = f(x_2) > 1, \dots, x_{n+1} = f(x_n) > 1$, $\therefore x_1$ 是最小的项, 所以 A, B 正确;

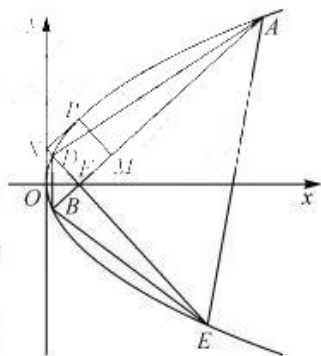
令 $g(x) = f(x) - x = \frac{1}{x} + \ln x - x$, $x \geq 1$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1 = \frac{-x^2 + x - 1}{x^2} < 0$, $\therefore g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内递减, $\therefore g(x) < g(1) = 0$, 所以 $x_3 - x_2 < 0$, 即 $x_3 < x_2$; $x_4 - x_3 < 0$ 即 $x_4 < x_3 \dots x_{n+1} - x_n < 0$, 即 $x_{n+1} < x_n (n \geq 2)$, 所以 C 错误;

因为 $x_{n+1} < x_n (n \geq 2)$, 所以 $g(x_{n+1}) > g(x_n)$, 则 $\frac{1}{x_{n+1}} + \ln x_{n+1} - x_{n+1} > \frac{1}{x_n} + \ln x_n - x_n$, 所以 $x_{n+2} - x_{n+1} > x_{n+1} - x_n$, 即 $2x_{n+1} < x_n + x_{n+2}$, 所以 D 正确. 故选 ABD.

12. 【答案】ACD

【解析】A 选项, 由题意得 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$, 设直线 $l_1: y = \frac{p}{2} + my$, 与 $y^2 = 2px$ 联立得 $y^2 - 2pmx - p^2 = 0$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 故 $y_1 + y_2 = 2pm, y_1y_2 = -p^2$, 则 $x_1x_2 = \frac{(y_1y_2)^2}{4p^2} = \frac{p^2}{4}$, 所以 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{p^2}{4} - p^2 = -\frac{3p^2}{4}$, 解得 $p = 2$. A 正确;

B 选项, 由 A 选项可知 $y_1 + y_2 = 4m, y_1y_2 = -4$, 因为 $\vec{AF} = 3\vec{FB}$, 所以 $y_1 = -3y_2$, 代入 $y_1 + y_2 = 4m, y_1y_2 = -4$ 得 $y_2 = -2m, -3y_2^2 = -4$, 即 $m^2 = \frac{1}{3}$, 因为点 A 在第一象限, 所以 $m > 0$, 解得 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故直线 l_1 的斜率为 $\frac{1}{m} = \sqrt{3}$, 设直



线 l_1 的倾斜角为 $\theta (0 \leq \theta < \pi)$, 则 $\tan \theta = \sqrt{3}$, 解得 $\theta = \frac{\pi}{3}$, B 错误;

C 选项: 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 的坐标为 $(1, 0)$, $P(1, 2)$.

因为 $|PM|^2 + |PN|^2 = |PF|^2 = 4$, $|PM|^2 + |PN|^2 \geq 2|PM| \cdot |PN|$,

所以 $|PM| \cdot |PN| \leq 2$, 由 $|PM|^2 + |PN|^2 = (|PM| + |PN|)^2 - 2|PM| \cdot |PN|$,

得 $(|PM| + |PN|)^2 \leq 8$, 即 $|PM| + |PN| \leq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $|PM| = |PN| = \sqrt{2}$ 时, 等号成立,

所以四边形 $PMFN$ 周长的最大值为 $4\sqrt{2}$, 故 C 正确;

D 选项: 由 A 选项, 得 $y_1 + y_2 = 4m, y_1y_2 = -4$, 则 $|AB| = \sqrt{1+m^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+m^2} \times \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = 4(1+m^2)$, 同理得 $|DE| = 4\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)$,

$\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|DE|} = \frac{1}{4(m^2+1)} + \frac{m^2}{4(m^2+1)} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|DE|} \geq 2\sqrt{\frac{1}{|AB|} \cdot \frac{1}{|DE|}}$, 所以 $|AB| \cdot |DE| \geq 64$.

当且仅当 $|AB|=|DE|=8$ 时, 等号成立,

此时 $S_{\text{四边形ADBE}} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |FE| + \frac{1}{2}|AB| \cdot |FD| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |DE| \geq 32$, 故 D 正确. 故选 ACD.

13. 【答案】1

【解析】由题设, $f(x)$ 是周期为 2 的偶函数, 所以 $f(13)+f(-14)=f(13)+f(0)=f(1)+f(0)=1$.

14. 【答案】 $\frac{13}{125}$

【解析】因考生成绩服从正态分布 $N(75, \sigma^2)$, 所以 $P(X > 90) = \frac{1 - P(60 \leq X \leq 90)}{2} = \frac{1}{5}$, 故任意选取 3 名考生, 至少有 2 名考生的成绩高于 90 的概率为 $P = C_3^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{13}{125}$.

15. 【答案】 $\frac{3}{2}$ 或 -1

【解析】因为 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{EM}$, 所以 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC}$.

又 $|\overrightarrow{AM}| = \frac{\sqrt{7}}{2}$, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ, AB = AC = 2$, 所以 $\overrightarrow{AM}^2 = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \frac{\lambda}{4}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \left(\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\lambda}{2} + \lambda^2 = \frac{7}{4}$, 即 $2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$, 所以 $\lambda = \frac{3}{2}$ 或 -1 .

16. 【答案】 $(1, +\infty), 2\ln 3$

【解析】由已知 x_1, x_2 是 $f'(x) = x - \ln x - a$ 的两个零点, 令 $h(x) = x - \ln x (x > 0)$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} (x > 0)$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调, 所以函数 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增, 当 $a \rightarrow 0$ 时, $f'(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) \rightarrow +\infty$. 所以只需 $f'(x)_{\min} = f'(1) = 1 - a < 0$ 即可, 所以 $a > 1$, 即实数 a 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

由已知 $a = x_1 - \ln x_1 = x_2 - \ln x_2$, 则 $x_2 - x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1}$, 令 $\frac{x_2}{x_1} = t \in (1, 3]$, 得 $\begin{cases} x_1 = \frac{\ln t}{t-1} \\ x_2 = \frac{t \ln t}{t-1} \end{cases}$

$\ln x_1 + \ln x_2 + 2a = x_1 + x_2 = \frac{(t+1)\ln t}{t-1}$, 令 $m(t) = \frac{(t+1)\ln t}{t-1}, t \in (1, 3]$, 则 $m'(t) = \frac{-2\ln t + t - \frac{1}{t}}{(t-1)^2}$,

令 $\varphi(t) = -2\ln t + t - \frac{1}{t}$, 则 $\varphi'(t) = \frac{(t-1)^2}{t^2} > 0 (t \in (1, 3])$, 所以函数 $\varphi(t)$ 在 $t \in (1, 3]$ 上递增, 又因为 $\varphi(1) = 0$, 所以当 $t \in (1, 3]$ 时, $\varphi(t) > 0$, 即 $m'(t) > 0$, 所以函数 $m(t)$ 在 $t \in (1, 3]$ 上递增, 所以 $m(t) \leq m(3) = 2\ln 3$, 所以 $\ln x_1 + \ln x_2 + 2a$ 的最大值为 $2\ln 3$.

17. 【解析】(1) 由 $a \sin B = \sqrt{3}b(1 - \cos A)$ 及正弦定理得 $\sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B(1 - \cos A)$, 1 分

因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\sin A = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos A$, 即 $\sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3 分

由 $0 < A < \pi, \frac{\pi}{3} < A + \frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$, 得 $A + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$; 5 分

(2) 由题意得 $BD = \frac{1}{3}a, DC = \frac{2}{3}a, AD = 1$, 来源: 高三答案公众号

在 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ACD$ 中, 分别由余弦定理得 $\cos \angle ADB = \frac{DA^2 + DB^2 - AB^2}{2DA \cdot DB} = \frac{1 + \frac{1}{9}a^2 - c^2}{\frac{2}{3}a}$, $\cos \angle ADC = \frac{DA^2 + DC^2 - AC^2}{2DA \cdot DC} = \frac{1 + \frac{4}{9}a^2 - c^2}{\frac{4}{3}a}$

【高三数学参考答案 第 4 页(共 8 页)】

$$\frac{DA^2 + DC^2 - AC^2}{2DA \cdot DC} = \frac{1 + \frac{4}{9}a^2 - b^2}{\frac{4}{3}a}, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

又 $\cos \angle ADB = -\cos \angle ADC$, 化简得 $b^2 + 2c^2 - 3 = \frac{2}{3}a^2 = \frac{2}{3}(b^2 + c^2 - bc)$, $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

整理得 $9 = b^2 + 4c^2 + 2bc \geq 4bc + 2bc = 6bc$, 即 $bc \leq \frac{3}{2}$, 当且仅当 $b = 2c$ 时等号成立.

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $S_{\max} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

另解: 因为 $\vec{CD} = 2\vec{DB}$, 所以 $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB}$, 所以 $9\vec{AD}^2 = \vec{AC}^2 + 4\vec{AC} \cdot \vec{AB} + 4\vec{AB}^2$, $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

又 $AD = 1, A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $9 = b^2 + 4c^2 + 4bc \cos \frac{\pi}{3} = b^2 + 4c^2 + 2bc \geq 4bc + 2bc = 6bc$, $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

所以 $bc \leq \frac{3}{2}$, 当且仅当 $b = 2c$ 时等号成立. 来源: 高三答案公众号

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $S_{\max} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

18. 【解析】(1) 因为 $BC = 2CD = 2PC$, 又 $PB = \sqrt{5}CD$, 所以 $PB^2 = 5CD^2 = BC^2 + CP^2$, 所以 $PC \perp BC$, $\dots\dots 2 \text{分}$

由 $AC \perp CD$, 可知 $AC \perp PC$. 因为 $AC, BC \subset$ 平面 $ABC, AC \cap BC = C$, 所以 $PC \perp$ 平面 ABC . $\dots\dots 4 \text{分}$

因为 $AB \subset$ 平面 ABC , 所以 $PC \perp AB$. 又 $AB \perp BC, PC \cap BC = C, PC, BC \subset$ 平面 PBC ,

所以 $AB \perp$ 平面 PBC . $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

(2) 由 (1) 知, 取 AC 的中点 O , 连接 OM, OB . $PC \perp$ 平面 ABC, OM 为 $\triangle PAC$ 的中位线.

所以 $OM \perp AC, OM \perp OB$, 即 OM, OB, AC 两两垂直. 如图以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

设 $CD = 2$, 则 $P(0, 2\sqrt{2}, 2), B(2\sqrt{2}, 0, 0), C(0, 2\sqrt{2}, 0), M(0, 0, 1)$. $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

所以 $\vec{PB} = (2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -2), \vec{BC} = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0), \vec{BM} = (-2\sqrt{2}, 0, 1)$.

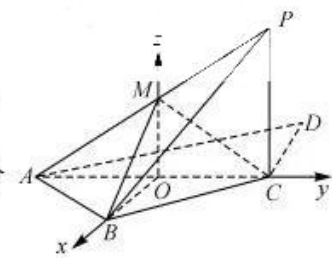
设平面 MBC 的一个法向量为 $n = (x, y, z)$.

则由 $\begin{cases} n \cdot \vec{BC} = 0, \\ n \cdot \vec{BM} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 0, \\ -2\sqrt{2}x + z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$, 得 $n = (1, 1, 2\sqrt{2})$, $\dots\dots$

$\dots\dots\dots 10 \text{分}$

所以 $\cos \langle n, \vec{PB} \rangle = \frac{n \cdot \vec{PB}}{|n| \cdot |\vec{PB}|} = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = -\frac{2}{5}$,

所以直线 PB 与平面 MBC 所成角的正弦值为 $\frac{2}{5}$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$



19. 【解析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由已知得 $q > 0$,

因为 $a_2 a_3 a_4 = 64$, 所以 $a_3^3 = 64$, 得 $a_3 = 4$, 又 $a_1 = 1$, 所以 $q = 2$,

所以 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$, $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

对于数列 $\{b_n\}$, 因为 $b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \dots + \frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - 1$ ①,

当 $n = 1$ 时, $b_1 = b_2 - 1$, 则 $b_2 = 2$,

当 $n \geq 2$ 时, $b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \dots + \frac{1}{n-1}b_{n-1} = b_n - 1$ ②,

由 ① - ② 得 $\frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - b_n$, 即 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n}$, $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

又 $\frac{b_2}{b_1} = 2$, 也适合上式, 故 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$,

当 $n \geq 2$ 时, $b_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot b_1 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{1} \cdot 1 = n$, 又 $b_1 = 1$,

所以 $b_n = n$; 6 分

(2) 由 (1) 可得: $a_n = 2^{n-1}$, $b_n = n$, 则 $c_n = a_n + (-1)^n (2b_n + 1) = 2^{n-1} + (-1)^n (2n + 1)$,

则数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $T_{2n} = 2^0 + (-1) \cdot (2+1) + 2^1 + (-1)^2 \cdot (2 \times 2 + 1) + \dots + 2^{2n-1} + (-1)^{2n} \cdot (2 \cdot 2n + 1)$, 8 分

所以 $T_{2n} = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2n-1}) + [(-1) \cdot (2+1) + (-1)^2 \cdot (2 \times 2 + 1) + \dots + (-1)^{2n} \cdot (2 \cdot 2n + 1)]$
 $= \frac{1-2^{2n}}{1-2} + [- (2+1) + (2 \times 2 + 1)] + \dots + [- (2 \cdot (2n-1) + 1) + (2 \cdot 2n + 1)]$
 $= 2^{2n} - 1 + 2n = 2^{2n} + 2n - 1$ 12 分

20. 【解析】(1) 由题设随机变量 X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$, 且 $X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$, 1 分

所以 $P(X=0) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, $P(X=1) = C_3^1 \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$,

$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$, $P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ 4 分

随机变量 X 的分布列如下表: 来源: 高三答案公众号

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$E(X) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$; 6 分

(2) 由 (1) 得 $P = P(X_1=2, X_2=3) + P(X_1=3, X_2=2) + P(X_1=3, X_2=3)$

$= C_3^2 / p_1^2 (1-p_1) \times (p_2)^3 + C_3^2 / p_2^2 (1-p_2) \times p_1^3 + p_1^3 / p_2^3$.

整理得 $P = \frac{1}{p_1^2 p_2^3} [3(p_1^3 p_2^2 + p_1^2 p_2^3) - p_1^3 p_2^3] = \frac{1}{p_1^2 p_2^3} (1 - 3p_1 p_2)$; 7 分

因为 $0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1$ 且 $p_1 + p_2 = \frac{4}{3}$, 所以 $\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 1, \frac{1}{3} \leq p_2 \leq 1$,

所以 $\frac{1}{9} \leq p_1 p_2 \leq \left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right)^2$, 当且仅当 $p_1 = p_2 = \frac{2}{3}$ 时等号成立, 即 $\frac{1}{9} \leq p_1 p_2 \leq \frac{4}{9}$, 8 分

令 $p_1 p_2 = t$, 则 $t \in \left[\frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right]$, 所以 $P(t) = -5t^3 + 4t^2, t \in \left[\frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right]$, 则 $P'(t) = -15t^2 + 8t$,

当 $t \in \left[\frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right]$ 时, $P'(t) > 0$, 则当 $t = \frac{4}{9}$ 时, $P(t)_{\max} = \frac{256}{729}$, 10 分

张华与刘中两同学在 n 轮比赛中获得的积分 X 满足 $X \sim B(n, P)$, 11 分

所以由 $nP \geq 5$, 即 $n \times \frac{256}{729} \geq 5$, 解得 $n \geq 5 \times \frac{729}{256} \approx 14.2$, 因为 n 为正整数, 所以 n 至少为 15,

所以若张华与刘中同学这一组想至少获得 5 个积分, 那么理论上至少要进行 15 轮竞赛. 12 分

21. 【解析】(1) 设 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$. 由对称性, 不妨设 $P(x_0, y_0) (x_0 \neq \pm a, y_0 > 0)$,

则 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, 所以 $y_0^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_0^2, -a < x_0 < a$.

因为 $\overrightarrow{PF_1} = (-c - x_0, -y_0), \overrightarrow{PF_2} = (c - x_0, -y_0)$,

所以 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = x_0^2 - c^2 + y_0^2 = x_0^2 - c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_0^2 = \frac{c^2}{a^2} x_0^2 - c^2 + b^2$, 2 分

所以当 $x_0=0$ 时, $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 取得最小值 $b^2 - c^2$, 所以 $b^2 - c^2 = 2$.

$$\text{由} \begin{cases} b^2 - c^2 = 2, \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 2, \\ b = \sqrt{3}, \\ c = 1, \end{cases}$$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; 5 分

(2) 由题设直线 l 斜率存在, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), l: y = k(x-1)$,

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x-1), \end{cases} \text{得} (3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0, \therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}, \\ x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}, \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\text{所以} |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_2 - x_1| = \sqrt{1+k^2} \times \sqrt{(x_2+x_1)^2 - 4x_1x_2} \\ = \sqrt{1+k^2} \times \sqrt{\left(\frac{8k^2}{4k^2+3}\right)^2 - 4 \times \frac{4k^2-12}{4k^2+3}} = \frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{因为} l \perp l_1, \text{所以} k_{MN} = -\frac{1}{k}, \text{则} |MN| = \frac{12(k^2+1)}{3k^2+4}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{所以四边形} AMBN \text{面积} S = \frac{1}{2} |AB| \times |MN| = \frac{1}{2} \times \frac{12(k^2+1)}{4k^2+3} \times \frac{12(k^2+1)}{3k^2+4} = \frac{72(k^2+1)^2}{(4k^2+3)(3k^2+4)}, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$S = \frac{72(k^2+1)^2}{(4k^2+3)(3k^2+4)} \geq \left(\frac{72(k^2+1)^2}{2(4k^2+3+3k^2+4)}\right)^2 = \frac{288}{49}$$

当且仅当 $4k^2+3=3k^2+4$ 时取等号, 即 $k = \pm 1$ 时, $S_{\min} = \frac{288}{49}$.

当直线 l 的斜率不存在时, $|AB| = 3, |MN| = 4$, 四边形 $AMBN$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$.

又由 $6 > \frac{288}{49}$, 所以四边形 $AMBN$ 面积的最小值为 $\frac{288}{49}$ 12 分

22. 【解析】(1) 由已知 $g(x) = \ln(x+1) - a(x+1)$, 令 $t = x+1$, 又 $x \in [0, e^2 - 1]$, 得 $t \in [1, e^2]$.

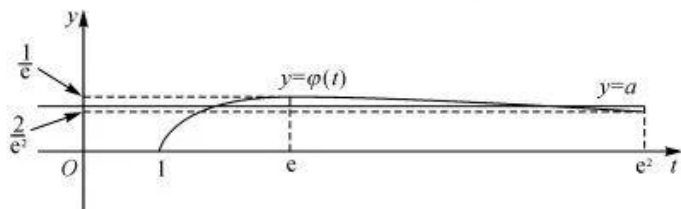
由题设可得 $a = \frac{\ln t}{t}$, 令 $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$, 其中 $t \in [1, e^2]$,

则直线 $y = a$ 与函数 $y = \varphi(t)$ 的图象在 $[1, e^2]$ 上有两个交点, 2 分

因为 $\varphi'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$, 当 $1 < t < e$ 时, $\varphi'(t) > 0$, 此时函数 $\varphi(t)$ 单调递增,

当 $e < t < e^2$ 时, $\varphi'(t) < 0$, 此时函数 $\varphi(t)$ 单调递减. 3 分

所以函数 $\varphi(t)$ 的极大值为 $\varphi(e) = \frac{1}{e}$, 且 $\varphi(1) = 0, \varphi(e^2) = \frac{2}{e^2}$, 如下图所示:



由图可知, 当 $\frac{2}{e^2} \leq a < \frac{1}{e}$ 时, 直线 $y = a$ 与函数 $y = \varphi(t)$ 在 $[1, e^2]$ 上的图象有两个交点,

所以函数 $g(x) = f(x) - a$ 在 $[0, e^2 - 1]$ 上有且仅有 2 个零点.

【高三数学参考答案 第 7 页(共 8 页)】

故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$; 5 分

(2) 当 $a > 0$ 时, 由已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$,

又 $f(x) \leq a^2 e^x - a(x+1)$ 恒成立, 即 $\ln(x+1) \leq a^2 e^x - a$ 在 $x > -1$ 时恒成立,

当 $x=0$ 时, $\ln(x+1) \leq a^2 e^x - a$ 恒成立, 即 $a^2 - a \geq 0$, 又 $a > 0$, 则 $a \geq 1$, 7 分

下面证明: 当 $a \geq 1$ 时, $\ln(x+1) \leq a^2 e^x - a$ 在 $x > -1$ 时恒成立,

由(1)得当 $x > -1$ 时, $\ln(x+1) \leq x$.

要证明 $\ln(x+1) \leq a^2 e^x - a$, 只需证明对任意的 $x \in (-1, +\infty)$, $a^2 e^x - a \geq x$ 恒成立. 8 分

令 $\varphi(x) = a^2 e^x - x - a$, 则 $\varphi'(x) = a^2 e^x - 1$.

由 $\varphi'(x) = a^2 e^x - 1 = 0$, 得 $x = \ln \frac{1}{a^2} = -2 \ln a \leq 0$.

(i) 当 $-2 \ln a \leq -1$, 即 $a \geq \sqrt{e}$ 时, $\varphi'(x) \geq 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立, 则 $\varphi(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

于是 $\varphi(x) > \varphi(-1) = \frac{a^2}{e} + 1 - a = \frac{1}{e} \left(a - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 + 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} > 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} > 0$, 10 分

(ii) 当 $-2 \ln a > -1$, 即 $1 \leq a < \sqrt{e}$ 时, $\varphi(x)$ 在 $(-1, -2 \ln a)$ 上单调递减, 在 $(-2 \ln a, +\infty)$ 上单调递增.

于是 $\varphi(x) \geq \varphi(-2 \ln a) = \frac{a^2}{a^2} + 2 \ln a - a = 2 \ln a - a + 1$, 11 分

令 $h(a) = 2 \ln a - a + 1$, 则 $h'(a) = \frac{2}{a} - 1 > \frac{2}{\sqrt{e}} - 1 > 0$, 则 $h(a)$ 在 $(1, \sqrt{e})$ 上单调递增,

于是 $h(a)_{\min} = h(1) = 0$, 所以 $\varphi(x) \geq 0$ 恒成立,

所以 $a \geq 1$ 时, 不等式 $a^2 e^x - a \geq x$ 恒成立, 因此 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站(网址: www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线