百校联盟 2020 届 TOP300 十月尖子生联考（全国 I 卷）

文科数学

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. $\sin 510° =$（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

【解析】

$\sin 510° = \sin(360°+150°) = \sin 150° = \frac{1}{2}$. 选 A.

2. 已知集合 $A = \left\{x \mid x^2 - 2x > 0\right\}, B = \left\{x \mid 2^x < 1\right\}$，则 $\left(C_R A\right) \cup B =$（　　）

A. $\varnothing$　　B. $[0,2]$　　C. $(-\infty, 2)$　　D. $(-\infty, 2]$

【答案】D

【解析】

【分析】

先化简集合 A，求出 A 的补集，再根据并集的概念，即可求出结果.

【详解】$\because A = \left\{x \mid x^2 - 2x > 0\right\} = \{x \mid x > 2$ 或 $x < 0\}$，$\therefore C_R A = \{x \mid 0 \quad x \quad 2\}$，

又 $\because B = \left\{x \mid 2^x < 1\right\} = \{x \mid x < 0\}$，$\therefore \left(C_R A\right) \cup B = \{x \mid x \quad 2\}$.

故选：D

【点睛】本题主要考查集合的混合运算，熟记并集与补集的概念即可，属于基础题型.

3. 已知 $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, c = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

A. $a < b < c$　　B. $c < b < a$　　C. $c < a < b$　　D.

$b<c<a$

【答案】D

【解析】

【分析】

根据函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 与 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的单调性，即可得出结果.

【详解】$\because f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，

又 $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 R 上为减函数，$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\therefore b<c<a$.

故选：D

【点睛】本题主要考查指数幂比较大小，熟记指数函数与幂函数单调性即可，属于常考题型.

4.在长方形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$，点 E 为 BC 的中点，点 F 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=$（　　）

A. -1　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. -2　　D. $-\frac{5}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据题意，得到 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，再由向量数量积的运算法则，直接计算，即可得出结果.

【详解】因为在长方形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$，点 E 为 BC 的中点，点 F 为 CD 的中点，

所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-2+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$.

故选：B

【点睛】本题主要考查向量的数量积运算，熟记运算法则即可，属于常考题型.

5.在等差数列$\{a_n\}$中，S_n为其前n项和，若$a_2+a_6+a_7=12$，则$S_9=$（　　）

A. 20　　B. 27　　C. 36　　D. 45

【答案】C

【解析】

【分析】

先由题意，得到$3a_1+12d=12$，推出 $a_1+4d=4$，再由等差数列的求和公式，即可得出结果.

【详解】因为$\{a_n\}$为等差数列，$a_2+a_6+a_7=12$，$\therefore 3a_1+12d=12$，因此 $a_1+4d=4$

又$\because S_9=9a_1+\frac{9\times 8}{2}d=9a_1+36d=9\left(a_1+4d\right)$，$\therefore S_9=36$.

故选：C

【点睛】本题主要考查等差数列的基本量运算，熟记等差数列的求和公式与通项公式即可，属于常考题型.

6.在平面直角坐标系xOy中，角α和角β均以Ox轴非负半轴为始边，它们的终边关于射线$y=2x$ $(x\ \ 0)$对称，那么$\sin(\alpha+\beta)=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】

先设直线$y=2x(x\ge 0)$的倾斜角为θ，得到$\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，再由题意得到

$\alpha+\beta=2\theta+2k\pi, k\in Z$，从而可求出结果.

【详解】设直线 $y=2x(x\geq 0)$ 的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=2$，$\therefore \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

由已知可知 $\alpha+\beta=2\theta+2k\pi, k\in Z$，

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{5}$.

故选：D

【点睛】本题主要考查由角的终边之间关系求三角函数值的问题，熟记同角三角函数基本关系，以及二倍角公式即可，属于常考题型.

7.在命题“若 $a^2>1$，则 $a>1$”的逆命题、否命题、逆否命题中，假命题的个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】

分别写出原命题的逆命题，否命题，逆否命题，直接判断，即可得出结果.

【详解】命题“若 $a^2>1$，则 $a>1$”的逆命题为“若 $a>1$，则 $a^2>1$”，为真命题；

否命题为“若 $a^2\quad 1$，则 $a\quad 1$”，为真命题；逆否命题“若 $a\quad 1$，则 $a^2\quad 1$”，为假命题，

所以假命题的个数为 1.

故选：B

【点睛】本题主要考查四种命题真假的判断，熟记四种命题以及四种命题真假之间的关系即可，属基础题型.

8.函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$，直线 $y=\sqrt{3}$ 与 $f(x)$ 图象相邻两个交点的横坐标之差的绝对值恒等于 $\dfrac{2\pi}{3}$，且 $f(0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则函数 $f(x)$ 的解析式为（　　）

A. $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】

先由直线 $y=\sqrt{3}$ 与 $f(x)$ 图象相邻两个交点的横坐标之差的绝对值恒等于 $\frac{2\pi}{3}$，得到 $A=\sqrt{3},T=\frac{2\pi}{3}$，求出 ω，再由 $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 求出 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，从而可求出结果.

【详解】∵直线 $y=\sqrt{3}$ 与 $f(x)$ 图象相邻两个交点的横坐标之差的绝对值恒等于 $\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore A=\sqrt{3},T=\frac{2\pi}{3}$，　$\therefore \omega=3$，因此 $f(x)=\sqrt{3}\sin(3x+\varphi)$，

又 $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\sqrt{3}\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore f(x)=\sqrt{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$

故选：B

【点睛】本题主要考查由三角函数的性质求函数解析式的问题，熟记正弦函数的图像与性质即可，属于常考题型.

9.方程 $\sin x+\log_5|x|=0$ 的根的个数为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】

先由题意，得到方程 $\sin x+\log_5|x|=0$ 的根，即是函数 $y=\sin x(x\in R)$ 与函数

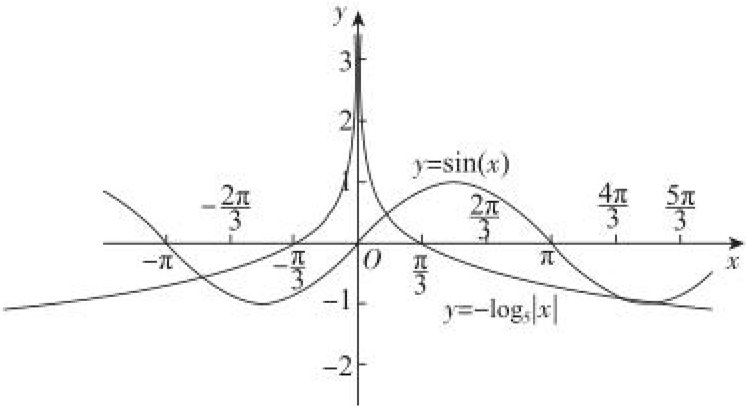
$y=-\log_5|x|$图像交点的横坐标，作出函数$y=\sin x(x\in R)$和函数$y=-\log_5|x|$的图象，根据$-\log_5 5=-1$，且$5>\frac{3\pi}{2}$，即可判断出结果.

【详解】由$\sin x+\log_5|x|=0$得$\sin x=-\log_5|x|$，

因此方程$\sin x+\log_5|x|=0$根的个数，即是函数$y=\sin x(x\in R)$与函数$y=-\log_5|x|$图像交点的个数；

在平面直角坐标系中，作出函数$y=\sin x(x\in R)$和函数$y=-\log_5|x|$的图象，

$\because -\log_5 5=-1$，且$5>\frac{3\pi}{2}$. $\therefore$两个函数在y轴右侧有三个交点，在y轴左侧有一个交点.



故选：C

【点睛】本题主要考查方程根的个数的判定，根据转化与化归的思想，将问题转化为函数交点问题，由数形结合的思想即可求解，熟记对数函数与正弦函数的图像与性质即可，属于常考题型.

10.定义在R上的函数$y=f(x+3)$为奇函数，且$f(x+3)-f(x)=2f(3)$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，则$f(2019)$的值是（　　）

A. 3　　B. 1　　C. 0　　D. -3

【答案】C

【解析】

【分析】

先由题意，得到 $f(3)=0$，将 $f(x+3)-f(x)=2f(3)$ 化为 $f(x+3)=f(x)$，得到函数周期，进而可求出结果.

【详解】∵ 定义在 R 上的函数 $y=f(x+3)$ 为奇函数，∴ $f(3)=0$，

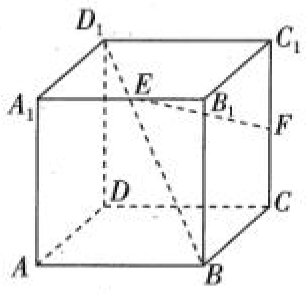
又∵ $f(x+3)-f(x)=2f(3)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，∴ $f(x+3)=f(x)$，

∴ $f(x)$ 的周期为 3，∴ $f(2019)=f(3)=0$

故选：C

【点睛】本题主要考查由函数奇偶性与周期性求函数值的问题，熟记函数奇偶性与周期性的概念即可，属于常考题型.

11.如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为棱 A_1B_1、CC_1 的中点，则异面直线 BD_1 与 EF 所成的角为（　　）



A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】

先在正方体中取 G 为棱 B_1C_1 的中点，连接 EG,FG，连接 B_1D_1，BC_1，根据线面垂直的判定定理，得到 $EG\perp$ 平面 BB_1D_1，推出 $EG\perp BD_1$；同理得到 $FG\perp BD_1$，进而可得 $BD_1\perp$ 平面 EFG，推出 $BD_1\perp EF$，即可确定结果.

【详解】如图，在正方体中取G为棱B_1C_1的中点，连接EG,FG，连接B_1D_1，BC_1.

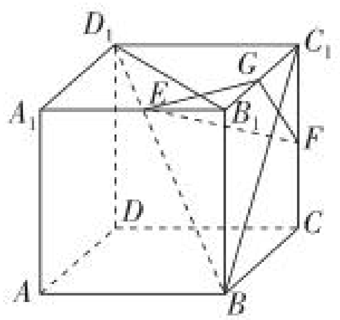
则$EG\perp B_1D_1$，又$BB_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，$EG\subset$平面$A_1B_1C_1D_1$，所以$BB_1\perp EG$，

因为$BB_1\cap B_1D_1=B_1$，所以$EG\perp$平面BB_1D_1，因此$EG\perp BD_1$

同理可得：$FG\perp BD_1$；因为$EG\bigcap FG=G$，所以$BD_1\perp$平面EFG，$\therefore BD_1\perp EF$，

$\therefore$异面直线BD_1与EF所成的角为$\dfrac{\pi}{2}$.

故选：D



【点睛】本题主要考查求异面直线所成的角，熟记线面垂直的判定定理与性质定理即可，属于常考题型.

12.已知$3xy-2x-y=2(x>0,y>0)$，则$2x+y$的最小值为（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】

根据题意，结合基本不等式，得到$3xy-2x-y=2\le\dfrac{3}{2}\cdot\left(\dfrac{2x+y}{2}\right)^2-(2x+y)$，令$t=2x+y$，得$2\le\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{t^2}{4}-t$，解不等式，即可得出结果.

【详解】因为$3xy-2x-y=2(x>0,y>0)$，

所以 $3xy-2x-y=2\le\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2-(2x+y)$，

当且仅当 $2x=y$ 取等号；

令 $t=2x+y$，则 $2\le\frac{3}{2}\cdot\frac{t^2}{4}-t$，即 $3t^2-8t-16\ge0$，

解得 $t\ge4$ 或 $t\le-\frac{4}{3}$（舍），

$\therefore 2x+y$ 的最小值为 4.（当且仅当 $x=1,y=2$ 时取得）

故选：D

【点睛】本题主要考查由基本不等式求最值问题，熟记基本不等式即可，属于常考题型.

二、填空题（每题 5 分，满分 20 分，将答案填在答题纸上）

13.等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $3a_4=a_6+6$，则 $S_5=$________.

【答案】15

【解析】

【分析】

先由 $3a_4=a_6+6$ 得到 $a_3=3$，再由等差数列求和公式，即可求出结果.

【详解】因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$3a_4=a_6+6$，$\therefore 3(a_1+3d)=a_1+5d+6$，

$\therefore a_1+2d=3$，即 $a_3=3$，$\therefore S_5=5a_3=15$

故答案为：15

【点睛】本题主要考查等差数列的基本量运算，熟记等差数列的通项公式与求和公式即可，属于基础题型.

14.函数 $y=\sin\left(2x+\varphi-\frac{\pi}{3}\right)(\varphi\in R)$ 为偶函数，则 $|\varphi|$ 的最小值为________.

【答案】$\frac{\pi}{6}$

【解析】

【分析】

由函数为偶函数，得到$\varphi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，进而可求出结果.

【详解】因为函数$y=\sin\left(2x+\varphi-\frac{\pi}{3}\right)(\varphi\in R)$为偶函数，所以$\varphi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\varphi=\frac{5\pi}{6}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore|\varphi|_{\min}=\frac{\pi}{6}$

故答案为：$\frac{\pi}{6}$

【点睛】本题主要考查由三角函数奇偶性求参数的问题，熟记诱导公式，以及三角函数的奇偶性即可，属于常考题型.

15.已知实数x,y满足$\begin{cases}x-y\le 1\\ x-2y+2\ge 0\\ 2x+y\ge 2\end{cases}$，则$z=x+y$最小值是________.

【答案】1.

【解析】

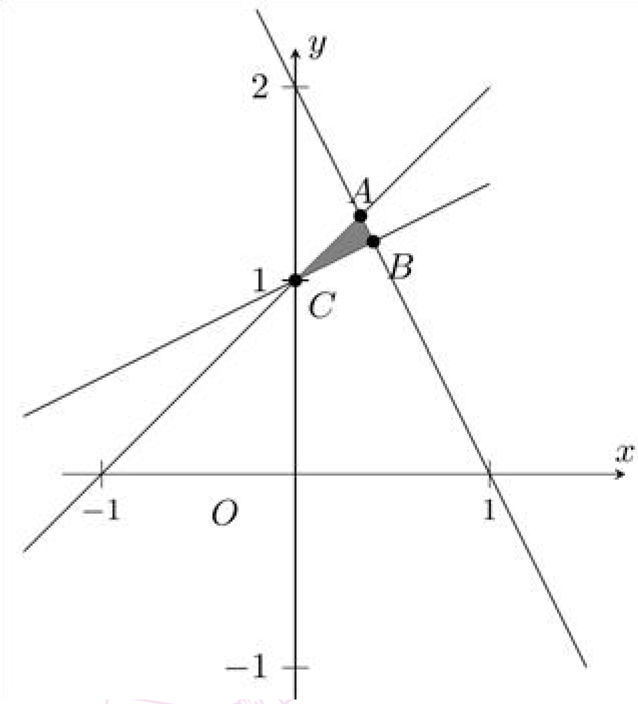
分析：由题意首先画出可行域，然后结合目标函数的几何意义整理计算即可求得最终结果.

详解：绘制不等式组表示的平面区域如图所示，

结合目标函数的几何意义可知，目标函数在点$C\left(0,1\right)$处取得最小值，

其最小值为：$z_{\min}=x+y=0+1=1$.

故答案为：1.



点睛：求线性目标函数 $z=ax+by(ab\neq 0)$ 的最值，当 $b>0$ 时，直线过可行域且在 y 轴上截距最大时，z 值最大，在 y 轴截距最小时，z 值最小；当 $b<0$ 时，直线过可行域且在 y 轴上截距最大时，z 值最小，在 y 轴上截距最小时，z 值最大.

16.若函数 $f(x)=xe^x-2x^2-ax-1$ 在 $[-2,-1]$ 上存在零点，则实数 a 的取值范围是

__________.

【答案】$\left[3+\frac{1}{e},\frac{9}{2}+\frac{1}{e^2}\right]$

【解析】

【分析】

先由 $xe^x-2x^2-ax-1=0$ 得到 $a=e^x-2x-\frac{1}{x}$，设 $g(x)=e^x-2x-\frac{1}{x}$，则函数有零点的问题，可转化为 $g(x)=e^x-2x-\frac{1}{x}$ 与 $y=a$ 在 $[-2,-1]$ 上有交点，对函数 $g(x)=e^x-2x-\frac{1}{x}$ 求导，用导数的方法判断其单调性，得到其在 $[-2,-1]$ 上的值域，进而可求出结果.

【详解】由 $xe^x-2x^2-ax-1=0$，得 $a=e^x-2x-\frac{1}{x}$.

设 $g(x)=e^x-2x-\dfrac{1}{x}$，

因为函数 $f(x)=xe^x-2x^2-ax-1$ 在 $[-2,-1]$ 上存在零点，

则 $g(x)=e^x-2x-\dfrac{1}{x}$ 与 $y=a$ 在 $x\in[-2,-1]$ 上有交点；

又 $g'(x)=e^x-2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2e^x-2x^2+1}{x^2}$，

设 $h(x)=x^2e^x-2x^2+1$，$\therefore h'(x)=2xe^x+x^2e^x-4x=2x\left(e^x-2\right)+x^2e^x$，

$\because x\in[-2,-1]$，$\therefore e^x-2<0$，$\therefore 2x\left(e^x-2\right)+x^2e^x>0$，

即 $h'(x)>0$，$\therefore h(x)=x^2e^x-2x^2+1$ 在 $[-2,-1]$ 上为增函数，

$\therefore h(x)\quad h(-1)=\dfrac{1}{e}-1<0$，$\therefore g'(x)=\dfrac{x^2e^x-2x^2+1}{x^2}<0$，

$\therefore g(x)=e^x-2x-\dfrac{1}{x}$ 在 $[-2,-1]$ 上为减函数，

又 $\because g(-1)=3+\dfrac{1}{e}, g(-2)=\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{e^2}$，$\therefore g(x)\in\left[3+\dfrac{1}{e},\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{e^2}\right]$，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left[3+\dfrac{1}{e},\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{e^2}\right]$.

故答案为：$\left[3+\dfrac{1}{e},\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{e^2}\right]$

【点睛】本题主要考查由函数零点求参数的问题，根据转化与化归的思想，将问题转化为函数图像有交点的问题来处理，对函数求导，用导数的方法研究函数的单调性，求出最值，即可得出结果，属于常考题型.

三、解答题 ：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.已知函数 $f(x)=x^3+ax^2-1(x\in R)$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $x\in(1,2)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）$5x-y-4=0$；（2）$(-\infty,-3]$

【解析】

【分析】

（1）对函数求导，根据 $a=1$，得到 $f'(1)$，即为所求切线斜率，进而可求出结果；

（2）由题意，得到 $f'(x)=3x^2+2ax \le 0$ 对 $x\in(1,2)$ 恒成立，即 $a \le -\dfrac{3}{2}x$ 对 $x\in(1,2)$ 恒成立，进而可求出结果.

【详解】（1）因为 $f'(x)=3x^2+2ax$，$\therefore$ 当 $a=1$ 时，$f'(1)=3+2=5$

$\therefore y-1=5(x-1)$，即 $5x-y-4=0$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $5x-y-4=0$.

（2）$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $x\in(1,2)$ 上单调递减，$\therefore f'(x)=3x^2+2ax \le 0$ 对 $x\in(1,2)$ 恒成立，

$\therefore a \le -\dfrac{3}{2}x$，$\because -3<-\dfrac{3}{2}x<-\dfrac{3}{2}$，$\therefore a \le -3$，

当 $a=-3$ 时，$f'(x)=3x(x-2)$ 对 $x\in(1,2)$ 有 $f'(x)<0$，

即当 $a=-3$ 时，$f(x)$ 在 $x\in(1,2)$ 上单调递减，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-3]$.

【点睛】本题主要考查求曲线在某点处的切线方程，以及由函数单调性求参数的问题，熟记导数的几何意义，以及利用导数的方法研究函数单调性即可，属于常考题型.

18.已知函数 $f(x)=|2x+m|+|x-m|(m>0)$.

（1）当 $m=2$ 时，求不等式 $f(x) \ge 5$ 的解集；

（2）若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(x) \ge 1$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $\left(-\infty,-\dfrac{5}{3}\right]\cup[1,+\infty)$；(2) $[\dfrac{2}{3},+\infty)$

【解析】

【分析】

（1）先由 $m=2$ 得到 $f(x)=\begin{cases}-3x,x\quad -1\\ x+4,-1<x<2\\ 3x,x\quad 2\end{cases}$，进而可求解不等式，得出结果；

（2）先由题意得到 $f(x)=|2x+m|+|x-m|=\begin{cases}-3x,x\quad -\dfrac{m}{2}\\ x+2m,-\dfrac{m}{2}<x<m\\ 3x,x\quad m\end{cases}$，得出函数最小值，

列出不等式，即可求出结果.

【详解】（1）当 $m=2$ 时，$f(x)=|2x+2|+|x-2|=\begin{cases}-3x,x\quad -1\\ x+4,-1<x<2\\ 3x,x\quad 2\end{cases}$，

由 $f(x)\quad 5$ 可得：$\begin{cases}x\quad -1\\ -3x\geq 5\end{cases}$，或 $\begin{cases}-1<x<2\\ x+4\geq 5\end{cases}$，或 $\begin{cases}x\quad 2\\ 3x\quad 5\end{cases}$，

解得：$x\quad -\dfrac{5}{3}$，或 $x\quad 1$，

$\therefore$ 不等式 $f(x)\quad 5$ 的解集为 $\left(-\infty,-\dfrac{5}{3}\right]\cup[1,+\infty)$.

（2）$\because f(x)=|2x+m|+|x-m|=\begin{cases}-3x,x\quad -\dfrac{m}{2}\\ x+2m,-\dfrac{m}{2}<x<m\\ 3x,x\quad m\end{cases}$，

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(-\dfrac{m}{2}\right)=\dfrac{3m}{2}$，$\therefore \dfrac{3m}{2}\quad 1$，$\therefore m\quad \dfrac{2}{3}$

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $[\dfrac{2}{3},+\infty)$.

【点睛】本题主要考查含绝对值不等式的解法，以及由不等式恒成立求参数的问题，灵活运

用分类讨论的思想，即可求解，属于常考题型.

19.已知ΔABC的内角A、B、C所对的边分别为a、b、c，且$a\sin B=\sqrt{3}b\cos A-\sqrt{3}c$.

（1）求角B；

（2）若AD是边BC的中线，$AD=\sqrt{3}$，$AB=1$，求边AC的长.

【答案】(1) $B=\dfrac{2\pi}{3}$；(2) $AC=\sqrt{7}$

【解析】

【分析】

（1）根据题意，结合正弦定理，以及两角和的正弦公式，得到$\sin B=-\sqrt{3}\cos B$，进而可求出结果；

（2）先由正弦定理，求出$\angle BDA=\dfrac{\pi}{6}$，得到$\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$，$BD=1,BC=2$，再由余弦定理，即可得出结果.

【详解】（1）由正弦定理得：$\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A-\sqrt{3}\sin C$，

又$\because C=\pi-(A+B)$，$\therefore\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A-\sqrt{3}\sin(A+B)$，

即$\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A-\sqrt{3}(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$，

又$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore\sin A\neq 0$，

$\therefore\sin B=-\sqrt{3}\cos B$，即$\tan B=-\sqrt{3}$，所以$B=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）根据正弦定理：$\sin\angle BDA=\dfrac{1\cdot\sin B}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$，

所以$\angle BDA=\dfrac{\pi}{6}$，故$\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$，得$BD=1\Rightarrow BC=2$，

由余弦定理得：$AC^2=BA^2+BC^2-2BA\cdot BC\cdot\cos B=1+4-2\times1\times2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7$，

所以$AC=\sqrt{7}$.

【点睛】本题主要考查解三角形，熟记正弦定理与余弦定理即可，属于常考题型.

20.等比数列$\{b_n\}$满足$b_n+b_{n+1}=\frac{10}{3}\cdot 9^n\left(n\in N^*\right)$，若数列$\{a_n\}$的通项$a_n$满足$a_n=\log_3 b_n$.

（1）求通项a_n；

（2）若数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，求$S_n$.

【答案】(1) $a_n=2n-1$；（2）$S_n=\frac{n}{2n+1}$

【解析】

【分析】

（1）根据题意得到$\begin{cases}b_1+b_2=30\\ b_2+b_3=270\end{cases}$，求出首项与公比，得到$b_n=3^{2n-1}$，进而可求出$a_n$；

（2）由（1）得到$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，根据裂项相消法，即可求出前$n$项和.

【详解】（1）设等比数列$\{b_n\}$的公比为q，由已知可得$\begin{cases}b_1+b_2=b_1+b_1q=30\\ b_2+b_3=b_1q+b_1q^2=270\end{cases}$，

解得$\begin{cases}b_1=3\\ q=9\end{cases}$，所以$b_n=3^{2n-1}$，

又因为$a_n=\log_3 b_n$，所以$a_n=2n-1$.

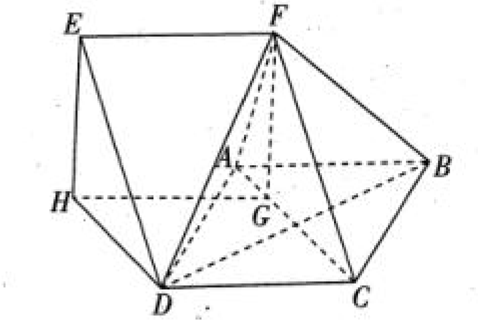
（2）因为$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

所以$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

【点睛】本题主要考查等差数列与等比数列的综合，熟记等差数列与等比数列的通项公式，以及裂项相消法求数列的和即可，属于常考题型.

21.如图，四边形$ABCD$是边长为2的菱形，且$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$. 四边形$CDEF$是平行四边形，

且 $DE=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. 点 E， F 在平面 $ABCD$ 内的射影为 H， G，且 G 在 AC 上，四棱锥 $F-ABCD$ 的体积为 2.



（1）求证：平面 $DHE\perp$ 平面 BDF；

（2）在 EF 上是否存在点 M，使 $MG//$ 平面 BCF？如果存在，是确定点 M 的位置，如果不存在，请说明理由.

【答案】（1）见解析；（2） M 是靠近点 E 的四等分点，理由见解析

【解析】

【分析】

（1）先由线面垂直的判定定理，证明 $BD\perp$ 平面 DHE，再由面面垂直的判定定理，即可证明结论成立；

（2）先由四棱锥的体积求出 $FG=\sqrt{3}$，得出 $GC=\dfrac{3}{2}$，即点 G 是靠近点 A 的四等分点，延长 HG 交 BC 于点 K，在梯形 $EFKH$ 内，过 G 作 FK 的平行线交 EF 于 M，则点 M 即为所求，再由 $MF=GK=\dfrac{3}{4}DC=\dfrac{3}{4}EF$，即可确定点 M 的位置.

【详解】（1）$\because$ 点 E,F 在平面 $ABCD$ 内的射影为 H,G，

$\therefore EH\perp$ 平面 $ABCD$， $FG\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore EH//FG$，且 $FG\subset$ 平面 AFC，$\therefore EH//$ 平面 AFC，

又 $\because$ 四边形 $CDEF$ 是平行四边形，

$\therefore ED//$ 平面 AFC， $\therefore$ 平面 $HED//$ 平面 AFC，$\therefore HD//AC$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore BD\perp AC$，$\therefore BD\perp HD$，且 $BD\perp EH$，

$\therefore BD\perp$ 平面 DHE，又 $BD\subset$ 平面 BDF， $\therefore$ 平面 $DHE\perp$ 平面 BDF .

（2）假设在 EF 上是存在点 M，使 $MG//$ 平面 BCF，

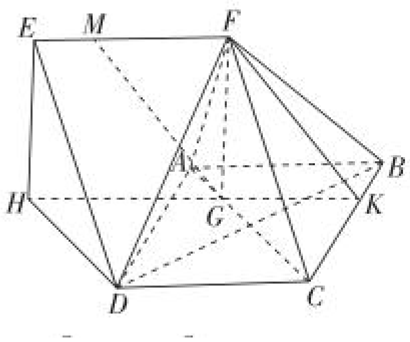
$\because$ 四棱锥 $F-ABCD$ 的体积为 2，即 $V_{F-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times4\times2\times FG=2$，

$\therefore FG=\sqrt{3}$，又 $DE=FC=\frac{\sqrt{21}}{2}$，$\therefore GC=\frac{3}{2}$，即点 G 是靠近点 A 的四等分点.

延长 HG 交 BC 于点 K，在梯形 $EFKH$ 内，过 G 作 FK 的平行线交 EF 于 M，

则点 M 即为所求.

$\because MF=GK=\frac{3}{4}DC=\frac{3}{4}EF$，即点 M 是靠近点 E 的四等分点.



【点睛】本题主要考查面面垂直的证明，以及补全线面平行的条件，熟记线面垂直、面面垂直的判定定理，以及线面平行的判定定理即可，属于常考题型.

22.已知函数 $f(x)=x-m\ln x-1$，且 $f(x)$ 的最小值为 0.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）若 $g(x)=a(x-1)-af(x)(a>0)$，且对于任意的 $x\in\left(1,e^2\right)$，都有 $g(x)+1>x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）$f(x)=x-\ln x-1$；（2）$\left[\frac{e^2-1}{2},+\infty\right)$

【解析】

【分析】

（1）先对函数求导，得到 $f'(x)=1-\frac{m}{x}$，分别讨论 m　0，$m>0$ 两种情况，利用导数的方法研究函数单调性，求出 m，即可得出结果；

（2）由（1）得 $g(x)=a\ln x(a>0)$，对于任意的 $x\in\left(1,e^{2}\right)$，都有 $g(x)+1>x$ 恒成立，可化为：$a>\dfrac{x-1}{\ln x}$ 在 $x\in\left(1,e^{2}\right)$ 上恒成立，设 $h(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}\left(x\in\left(1,e^{2}\right)\right)$，用导数的方法研究其单调性，即可得出结果.

【详解】（1）∵ $f(x)=x-m\ln x-1,x\in(0,+\infty)$，∴ $f^{'}(x)=1-\dfrac{m}{x}$，

当 $m\quad 0$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，无最小值；

当 $m>0$ 时，由 $f'(x)<0$，得 $x=m$，

∴ $x\in(0,m)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，

$x\in(m,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数.

∴ $f(x)_{\min}=f(m)=m-m\ln m-1=0$，令 $\varphi(m)=m-m\ln m-1(m>0)$

$\varphi^{'}(m)=1-\ln m-1=-\ln m$，由 $\varphi^{'}(m)=-\ln m=0$ 得 $m=1$.

易知 $\varphi(m)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减，且 $\varphi(1)=0$.

∴ $f(x)_{\min}=f(m)=m-m\ln m-1=0$ 只有一解 $m=1$.

$\therefore$ 函数 $f\left(x\right)$ 的解析式为 $f(x)=x-\ln x-1$.

（2）由 $g(x)=a(x-1)-af(x)(a>0)$，可得 $g(x)=a\ln x(a>0)$，

∴ $g(x)+1>x\Rightarrow a\ln x>x-1$，又因为 $x\in\left(1,e^{2}\right)$，$\therefore a\ln x>x-1\Rightarrow a>\dfrac{x-1}{\ln x}$

设 $h(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}\left(x\in\left(1,e^{2}\right)\right)$，∴ $h^{'}(x)=\dfrac{\ln x-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{(\ln x)^{2}}$，

令 $k(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}\left(x\in\left(1,e^{2}\right)\right)$，则 $k^{'}(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^{2}}=\dfrac{x-1}{x^{2}}>0$

$\therefore k(x)$ 在 $(1,e^{2})$ 上为增函数，∴ $k(x)>k(1)=0$

$\therefore h'(x)=\dfrac{\ln x-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}>0$，$\therefore h(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}\left(x\in\left(1,e^2\right)\right)$为增函数.

$\therefore h(x)<h\left(e^2\right)=\dfrac{e^2-1}{2}$，$\therefore a$ 的取值范围是$\left[\dfrac{e^2-1}{2},+\infty\right)$.

【点睛】本题主要考查由函数最值求参数，以及不等式恒成立求参数的问题，通常需要对函数求导，用导数的方法研究函数单调性，最值等，灵活运用转化与化归的思想即可，属于常考题型.