

河北省“五个一”名校联盟  
2024 届高三二年级联考（2023. 06）

数学试卷

命题单位：唐山市第一中学

（满分：150 分，测试时间：120 分钟）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x | y = \sqrt{x-1}\}$ ，集合  $B = \{y | y = \sqrt{x-1}\}$ ，则下列说法正确的是（ ）

A.  $A = B$                       B.  $A \subseteq B$                       C.  $B \subseteq A$                       D.  $A \cap B = \emptyset$

2. 已知  $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$ ， $|2\vec{a} - \vec{b}| = 4$ ，则  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  夹角的余弦值为（ ）

A.  $-1$                       B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $0$                       D.  $1$

3. 已知双曲线  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$  与双曲线  $\frac{x^2}{25+k} - \frac{y^2}{9-k} = 1 (0 < k < 9)$ ，则两双曲线的（ ）

A. 实轴长相等                      B. 虚轴长相等                      C. 离心率相等                      D. 焦距相等

4. 已知  $f(x) = a^x + a^{-x}$ ，且  $f(3) > f(1)$ ，则下列各式一定成立的是（ ）

A.  $f(3) > f(-2)$                       B.  $f(0) > f(3)$                       C.  $f(-1) > f(-3)$                       D.  $f(0) > f(-1)$

5. 一条长椅上有 6 个座位，3 个人坐. 要求 3 个空位中恰有 2 个空位相邻，则坐法的种数为（ ）

A. 36                      B. 48                      C. 72                      D. 96

6. 某学校有男生 600 人，女生 400 人. 为调查该校全体学生每天的运动时间，采用分层抽样的方法获取容量为  $n$  的样本. 经过计算，样本中男生每天运动时间的平均值为 80 分钟，方差为 10；女生每天运动时间的平均值为 60 分钟，方差为 20. 结合数据，估计全校学生每天运动时间的方差为（ ）

A. 96                      B. 110                      C. 112                      D. 128

7. 过直线  $x + y - 4 = 0$  上一点向圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  作两条切线，设两切线所成的最大角为  $\alpha$ ，则  $\sin \alpha =$ （ ）

A.  $\frac{4\sqrt{2}}{9}$                       B.  $\frac{2\sqrt{2}}{9}$                       C.  $\frac{\sqrt{7}}{4}$                       D.  $\frac{\sqrt{7}}{8}$

8. 设  $f(x)$  是定义在  $R$  上的奇函数, 且满足  $f\left(\frac{3}{2} - x\right) = f(x)$ ,  $f(1) = 2$ . 数列  $\{a_n\}$  满足

$$a_1 = -1, \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{2}{n(n+1)} (n \in N^*), \text{ 则 } f(a_{22}) = ( \quad )$$

A. 0

B. -1

C. 2

D. -2

二、多选题: 本题共 4 小题. 在每小题所给的四个选项中, 有多个选项符合题意. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 若  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ , 则下列说法正确的是 ( )

A. 若事件  $A$ 、 $B$  相互独立, 则事件  $A$ 、 $B$  也互斥

B. 若事件  $A$ 、 $B$  相互独立, 则事件  $A$ 、 $B$  不互斥

C. 若事件  $A$ 、 $B$  互斥, 则事件  $A$ 、 $B$  也相互独立

D. 若事件  $A$ 、 $B$  互斥, 则事件  $A$ 、 $B$  不相互独立

10. 函数  $y = f(x)$  由关系式  $x|x| + y|y| = 1$  确定, 则下列说法正确的是 ( )

A. 函数  $f(x)$  的零点为 1

B. 函数的定义域和值域均为  $[-1, 1]$

C. 函数  $y = f(x)$  的图像是轴对称图形

D. 若  $g(x) = f(x) + x$ , 则  $g(x)$  在定义域内满足  $g(x) > 0$  恒成立

11. 某通信工具在发送、接收信号时都会使用数字 0 或是 1 作为代码, 且每次只发送一个数字.

由于随机因素的干扰, 发出的信号 0 或 1 有可能被错误地接收为 1 或 0. 已知发送信号 0 时, 接收成 0 或 1 的概率分别为 0.94 和 0.06; 发送信号 1 时, 接收成 1 或 0 的概率分别为 0.96 和 0.04.

假设发送信号 0 或 1 的概率是等可能的, 则 ( )

A. 已知两次发送的信号均为 1, 则接收到的信号均为 1 的概率为  $(0.5)^2 \cdot (0.96)^2$

B. 在单次发送信号中, 接收到 0 的概率为 0.49

C. 在单次发送信号中, 能正确接收的概率为 0.95

D. 在发送三次信号后, 恰有两次接收到 0 的概率为  $C_3^2(0.49)^2 \cdot 0.51$

12. 已知  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形,  $AB$  为斜边且长度是 4.  $\triangle ABD$  为等边三角形, 若二面角  $C - AB - D$  为直二面角, 则下列说法正确的是 ( )

A.  $AB \perp CD$

B. 三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

C. 三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为 $\frac{64}{3}\pi$

D. 半径为 $\frac{1}{2}$ 的球可以被整体放入以三棱锥 $A-BCD$ 为模型做的容器中

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

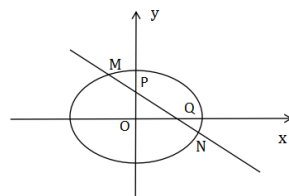
13. 方程 $(x-3)(x-5)+5=0$ 在复数集 $C$ 中的解为\_\_\_\_\_.

14.  $\frac{\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} =$ \_\_\_\_\_.

15. 已知函数 $f(x) = \cos \omega x (\omega > 0)$ 的图像关于点 $(\frac{3\pi}{4}, 0)$ 对称，且在区间 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上单调，则 $\omega =$ \_\_\_\_\_.

16. 如图所示，斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的直线 $l$ 交椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

于 $M, N$ 两点，交 $x$ 轴、 $y$ 轴分别于 $Q, P$ 两点，且 $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN}$ ，则椭圆的离心率为\_\_\_\_\_.



四、解答题：本题共6小题. 第17题10分，第18~22题每小题12分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n = 2n^2 + 5n$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 8$ ， $b_n = 16b_{n+1}$ .

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；

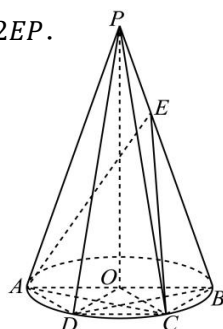
(2) 是否存在常数 $p, q$ ，使得对一切正整数 $n$ 都有 $a_n = \log_p b_n + q$ 成立？若存在，求出 $p, q$ 的值；若不存在，说明理由.

18. 记 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ ，且 $(2b-c)\cos A = a\cos C$ .

(1) 求角 $A$ 的大小；

(2) 设 $BC$ 边上的高 $AD = 1$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.

19.如图,圆锥 $PO$ 的高为3,  $AB$ 是底面圆 $O$ 的直径,  $PC, PD$ 为圆锥的母线, 四边形 $ABCD$ 是底面圆 $O$ 的内接等腰梯形, 且 $AB = 2CD = 2$ , 点 $E$ 在母线 $PB$ 上, 且 $BE = 2EP$ .



(1) 证明: 平面 $AEC \perp$ 平面 $POD$ ;

(2) 求平面 $AEC$ 与平面 $EAB$ 的夹角的余弦值.

20. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1)\ln x$  ( $a \neq 0$ ).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 既有极大值又有极小值, 且极大值和极小值的和为 $g(a)$ . 解不等式 $g(a) < 2a - 2$ .

21. 已知 $B$ 为抛物线 $y^2 = 2x - 2$ 上一点,  $A(2, 0)$ ,  $B$ 为 $AC$ 的中点, 设 $C$ 的轨迹为曲线 $E$ .

(1) 求曲线 $E$ 的方程;

(2) 过点 $F(1,0)$ 作直线交曲线 $E$ 于点 $M, N$ , 点 $P$ 为直线 $l: x = -1$ 上一动点. 问是否存在点 $P$ 使 $\triangle MNP$ 为正三角形? 若存在, 求出点 $P$ 坐标; 若不存在, 请说明理由.

22. 航天事业是国家综合国力的重要标志, 带动着一批新兴产业和新兴学科的发展. 某市为了激发学生对航天科技的兴趣, 点燃学生的航天梦, 现组织该市全体学生参加航天创新知识竞赛, 并随机抽取 1000 名学生作为样本, 研究其竞赛成绩. 经统计分析该市高中生竞赛成绩 $X$ 近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中 $\mu$ 近似为样本平均数 $\bar{x}$ ,  $\sigma^2$ 近似为样本方差 $s^2$ , 并已求得 $\bar{x} = 73$ 和 $s^2 = 37.5$ .

(1) 若该市有 4 万名高中生, 试估计这些高中生中竞赛成绩位于区间 $(66.9, 85.2)$ 的人数;

(2) 若规定成绩在 85.2 以上的学生等级为优秀, 现从全市高中生中任意抽取一个进行访谈, 如果取到学生等级不是优秀, 则继续抽取下一个, 直至取到等级为优秀的学生为止, 但抽取的总次数不超过 $n$ . 如果抽取次数的期望值不超过 6, 求 $n$ 的最大值.

(附:  $\sqrt{37.5} \approx 6.1$ ,  $0.975^5 \approx 0.881$ ,  $0.975^6 = 0.859$ ,  $0.975^7 = 0.838$ ,  $0.975^8 = 0.817$ ,

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$ ,  $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.95$ )