第三届陈省身杯全国高中数学奥林匹克解答

1. 由熟知的性质,知 O_2 为$\odot O$ 的弧$\overset{\frown}{BC}$的中点,且 A、I、O_2 三点共线.

如图1,设 AD 与$\odot O$ 的第二个交点为 O_2'.

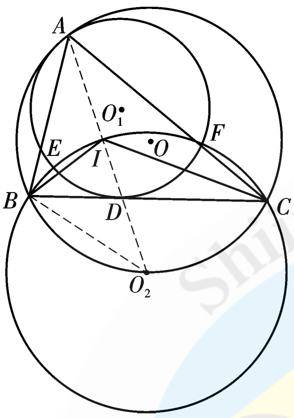

图 1

因为 A 是$\odot O_1$ 与$\odot O$ 的位似中心,所以,BC 与过 O_2' 且与$\odot O$ 相切的直线平行.

于是,点 O_2' 与 O_2 重合.

联结 O_2B.

由$\angle O_2BD=\angle O_2BC$

$=\angle CAO_2=\angle O_2AB$,

则$\triangle O_2BD\backsim\triangle O_2AB\Rightarrow\dfrac{O_2B}{O_2A}=\dfrac{O_2D}{O_2B}$.

又 $O_2E^2=O_2B^2=O_2D\cdot O_2A$,知 O_2E 与$\odot O_1$ 切于点 E.

因此,$\angle O_2EO_1=90°$.

类似地,$\angle O_2FO_1=90°$.

所以,O_1、E、O_2、F 四点共圆.

2. 由于原不等式左边任意两个括号的和为正,故三个括号中至多一个非正.

因此,不妨假设三个括号均为正.

令 $k=abc$,$a^3=\dfrac{kx}{y}$,$b^3=\dfrac{ky}{z}$,$c^3=\dfrac{kz}{x}$.

则原式左边

$$=\frac{(k^2x+z-ky)(k^2y+x-kz)(k^2z+y-kx)}{k^3xyz}.$$

令 $k^2x+z-ky=u$,$k^2y+x-kz=v$,
$k^2z+y-kx=w$.

则 $x=\dfrac{ku+v}{k^3+1}$,$y=\dfrac{kv+w}{k^3+1}$,$z=\dfrac{kw+u}{k^3+1}$.

故原式左边

$$=\frac{uvw\,(1+k^3)^3}{k^3(ku+v)(kv+w)(kw+u)}.$$

注意到,

$$\begin{aligned}&(ku+v)(kv+w)(kw+u)\\&=(1+k^3)uvw+(v^2w+w^2u+u^2v)k^2+\\&\quad(w^2v+v^2u+u^2w)k\\&\geqslant(1+k^3)uvw+3uvwk^2+3uvwk\\&=uvw\,(k+1)^3.\end{aligned}$$

则原式左边

$$\leqslant\frac{(1+k^3)^3}{k^3(k+1)^3}=\left(k+\frac{1}{k}-1\right)^3.$$

3. 由(2)知对任意 i、j($0\leqslant i<j\leqslant 2\,012$)及 $m=3^\alpha\times11^\beta\times61^\gamma$($\alpha$、$\beta$、$\gamma\in\{0,1\}$),有

$$a_i\equiv a_j\pmod m\Leftrightarrow i\equiv j\pmod m.\qquad①$$

令

$A_i=\{x\in\mathbf{N}\mid0\leqslant x\leqslant2\,012,x\equiv i\pmod 3\}$($i=0,1,2$),

$A_{ij}=\{x\in A_i\mid x\equiv j\pmod{11}\}$($j=0,1,\cdots,10$),

$A_{ijk}=\{x\in A_{ij}\mid x\equiv k\pmod{61}\}$($k=0,1,\cdots,60$).

由式①知对 $i=0,1,2$ 所有 a_n($n\in A_i$)模 3 同余(该余数记为 i'),有一一映射

$f_1:A_i\rightarrow A_{i'}$.

类似地,有一一映射

$f_2:A_{ij}\rightarrow A_{i'j'}$,$f_3:A_{ijk}\rightarrow A_{i'j'k'}$.

故有$(3!)(11!)(61!)$种排列满足条件.

下面构造一种方法得到所有的排列.

设双射 $f:(i,j,k)\rightarrow(i',j',k')$,其中,

$0\leqslant i、i'\leqslant 2, 0\leqslant j、j'\leqslant 10, 0\leqslant k、k'\leqslant 60.$

若 n 满足

$$\begin{cases} n\equiv i \pmod 3, \\ n\equiv j \pmod{11}, \\ n\equiv k \pmod{61}, \end{cases}$$

则取 a_n 为满足

$$\begin{cases} a_n\equiv i' \pmod 3, \\ a_n\equiv j' \pmod{11}, \\ a_n\equiv k' \pmod{61} \end{cases}$$

的数.

由中国剩余定理知其解唯一.

显然,$(a_0, a_1, \cdots, a_{2\,012})$满足条件(1)、(2).

故 $N=(3!)(11!)(61!)$.

于是,$p=67$.

4. 一方面,$\{1,2,\cdots,n+2\}$的好子集可以分成两类:包含1的和不包含1的.

因为$\{1,2,\cdots,n+2\}$的不包含1的好子集中每个元素均减去1,即为$\{1,2,\cdots,n+1\}$的好子集,$\{1,2,\cdots,n+1\}$的好子集中每个元素均加上1,即为$\{1,2,\cdots,n+2\}$的不包含1的好子集,所以,$\{1,2,\cdots,n+2\}$的不包含1的好子集与$\{1,2,\cdots,n+1\}$的好子集一一对应,其个数为$A(n+1)$.

因此,$\{1,2,\cdots,n+2\}$的包含1的好子集个数恰为$A(n+2)-A(n+1)$.

另一方面,$\{1,2,\cdots,n+1\}$的好子集可以分成两类:包含1的和不包含1的.

因为$\{1,2,\cdots,n+1\}$的不包含1的好子集中每个元素均减去1,即为$\{1,2,\cdots,n\}$的好子集,$\{1,2,\cdots,n\}$的好子集中每个元素均加上1,即为$\{1,2,\cdots,n+1\}$的不包含1的好子集,所以,$\{1,2,\cdots,n+1\}$的不包含1的好子集与$\{1,2,\cdots,n\}$的好子集一一对应,其个数为$A(n)$.

因此,$\{1,2,\cdots,n+1\}$的包含1的好子集个数恰为$A(n+1)-A(n)$.

故$\{1,2,\cdots,n+2\}$的包含1且不包含$n+2$的好子集个数恰为$A(n+1)-A(n)$.

综上,$\{1,2,\cdots,n+2\}$的包含1且包含$n+2$的好子集个数恰为

$$A(n+2)-A(n+1)-[A(n+1)-A(n)]$$
$$=A(n+2)-2A(n+1)+A(n).$$

原命题等价于$\{1,2,\cdots,100\}$至少有六个包含1且包含100的好子集.

下面给出$\{1,2,\cdots,100\}$包含1且包含100的六个好子集:

$\{1,2,\cdots,99,100\}$, $\{1,4,\cdots,97,100\}$,
$\{1,10,\cdots,91,100\}$, $\{1,12,\cdots,89,100\}$,
$\{1,34,67,100\}$, $\{1,100\}$.

5. 设$\odot O$、$\odot O'$的半径分别为r、r',且不妨设$r<r'$,l的选取如图2所示.

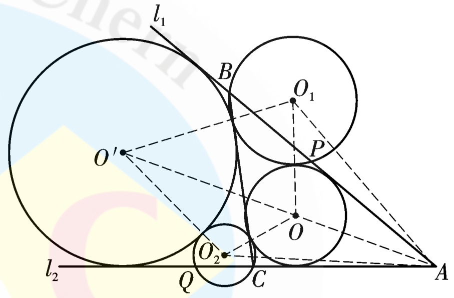

图 2

设直线l_1、l_2交于点A,$\odot O_1$、$\odot O_2$的半径分别为R_1、R_2.

则A、O、O'三点共线,且

$$OO_1=r+R_1, O'O_1=r'+R_1,$$
$$OO_2=r+R_2, O'O_2=r'+R_2.$$

在$\triangle OO'O_1$中,由斯特瓦尔特定理得

$$AO_1^2=\frac{O'A\cdot OO_1^2-AO\cdot O'O_1^2}{O'O}+O'A\cdot AO$$
$$=\frac{O'A\,(r+R_1)^2-AO\,(r'+R_1)^2}{O'O}+O'A\cdot AO.$$

类似地,

$$AO_2^2=\frac{O'A\,(r+R_2)^2-AO\,(r'+R_2)^2}{O'O}+O'A\cdot AO.$$

故 $AO_1^2-AO_2^2$

$$=\frac{O'A(R_1^2-R_2^2+2r(R_1-R_2))-AO(R_1^2-R_2^2+2r'(R_1-R_2))}{O'O}$$
$$=\frac{O'O(R_1^2-R_2^2)+2(R_1-R_2)(O'A\cdot r-AO\cdot r')}{O'O}.$$

由 $\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{AO}=\frac{r'}{O'A}$

$\Rightarrow O'A\cdot r-AO\cdot r'=0$

$\Rightarrow AO_1^2-AO_2^2=R_1^2-R_2^2$

$\Rightarrow AO_1^2-R_1^2=AO_2^2-R_2^2$.

又 $AO_1^2-R_1^2=AP\cdot AB$,

$AO_2^2-R_2^2=AQ\cdot AC$,

从而,$AP\cdot AB=AQ\cdot AC$.

因此,B、P、C、Q 四点共圆.

6. 令 $a=\frac{9x^2}{x^2+y^2+z^2}$,$b=\frac{9y^2}{x^2+y^2+z^2}$,

$c=\frac{9z^2}{x^2+y^2+z^2}$,$x+y+z=1$.

则原不等式变为

$x^2+y^2+z^2\geqslant 9(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$.

因为 $a\geqslant 1$,所以,

$9x^2=a(x^2+y^2+z^2)\geqslant x^2+y^2+z^2$

$\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{3}=\frac{1}{3}$.

从而,$x\geqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

类似地,$y\geqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}$,$z\geqslant\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$. 则

$\frac{1}{3\sqrt{3}}\leqslant z\leqslant\frac{1}{3}$,

$\frac{1}{3}\leqslant\frac{x+y}{2}=\frac{1-z}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}-1}{6\sqrt{3}}$.

令 $f(x,y,z)$

$=x^2+y^2+z^2-9(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$.

则 $f(x,y,z)-f\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2},z\right)$

$=\frac{(x-y)^2}{2}\left(1-9z^2+\frac{9}{8}(x+y)^2+\frac{9}{2}xy\right)\geqslant 0$.

故只需证明在 $t\in\left(\frac{1}{3},\frac{3\sqrt{3}-1}{6\sqrt{3}}\right)$时,

$f(t,t,1-2t)\geqslant 0$.

而 $f(t,t,1-2t)$

$=2t^2+(1-2t)^2-9(t^4+2t^2(1-2t)^2)$

$=(3t-1)^2(1+2t-9t^2)\geqslant 0$

$\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{10}}{9}<t<\frac{1+\sqrt{10}}{9}$.

故只要验证$\frac{3\sqrt{3}-1}{6\sqrt{3}}<\frac{1+\sqrt{10}}{9}$. 显然.

7. 显然,$x_2=7$,且对任意正整数 n,x_n 为正整数.

由高斯函数的性质得

$4x_n+\sqrt{11}x_n>x_{n+1}=4x_n+[\sqrt{11}x_n]$

$>4x_n+\sqrt{11}x_n-1$.

上式两边同乘以 $4-\sqrt{11}$ 得

$5x_n>(4-\sqrt{11})x_{n+1}>5x_n-(4-\sqrt{11})$

$\Rightarrow 4x_{n+1}-5x_n<\sqrt{11}x_{n+1}$

$<4x_{n+1}-5x_n+(4-\sqrt{11})$

$\Rightarrow[\sqrt{11}x_{n+1}]=4x_{n+1}-5x_n$

$\Rightarrow x_{n+2}=4x_{n+1}+[\sqrt{11}x_{n+1}]$

$=4x_{n+1}+(4x_{n+1}-5x_n)$

$=8x_{n+1}-5x_n$.

显然,$x_{n+2}\equiv x_n\pmod 2$,

$x_{n+2}\equiv 3x_{n+1}\pmod 5$.

由 $x_1=1$,$x_2=7$,可利用第二数学归纳法容易证明:对任意正整数 n 有

$x_n\equiv 1\pmod 2$.

由 $x_2=7$,可利用第一数学归纳法容易证明:对任意大于或等于 2 的正整数 n 有

$x_n\equiv 2\times 3^{n-2}\pmod 5$.

因为 $x_{2\,012}\equiv 1\pmod 2$,

$x_{2\,012}\equiv 2\times 3^{2\,010}\equiv 2\times 3^2\equiv 3\pmod 5$,

所以,$x_{2\,012}$的个位数字为 3.

8. 显然,L 为 i、$\sqrt{3}i(i=1,2,\cdots,n)$ 中 n 个取正号、n 个取负号的数之和.

为使 L 取最大值,则上述 $2n$ 个数中较大的 n 个数取正号,较小的 n 个数取负号.

设 $\sqrt{3}\,i(i=1,2,\cdots,a)$ 及 $j(j=1,2,\cdots,b)$ 取负号,其余取正号. 则

$$\begin{cases}a+b=n,\\ \sqrt{3}(a+1)>b,\Rightarrow\\ b+1>\sqrt{3}a\end{cases}\begin{cases}a=\left[\dfrac{n+1}{\sqrt{3}+1}\right],\\ b=n-a.\end{cases}$$

故 $L_{\max}=\sqrt{3}\left(\dfrac{n(n+1)}{2}-a(a+1)\right)+$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}-b(b+1)\right).$$

下面求满足 $L_{\max}$ 时的 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=A$ 的个数.

令 $I_1=\{1,2,\cdots,a\}$,

$I_2=\{a+1,a+2,\cdots,b\}$,

$I_3=\{b+1,b+2,\cdots,n\}$.

由取正负号的情形知有下列性质.

(1) $I_j(j=1,3)$ 中数在 A 中两两不相邻.

否则,设 x_i、$x_{i+1}\in I_j$. 则由 $\left|x_i-\sqrt{3}x_{i+1}\right|$,知 x_i、$\sqrt{3}x_{i+1}$ 异号,矛盾.

(2) I_3 中数在 A 中的后一个数不属于 I_2.

否则,设 $x_i\in I_3$,$x_{i+1}\in I_2$,则由 $\left|x_i-\sqrt{3}x_{i+1}\right|$,知 x_i、$\sqrt{3}x_{i+1}$ 异号,矛盾.

(3) I_3 中数在 A 中的后一个数属于 I_1.

(4) I_2 中数在 A 中可以相邻.

由(1)~(4)知,将 A 中各数依次排在一个圆周上,I_3 与 I_1 中各取一数彼此相邻,共有 a 组,将圆周分成 a 段,I_2 中数随意放入其中,所得到的任一排列满足条件.

所以,满足 $L_{\max}$ 时的排列 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的个数为 $n((n-a-1)!)(a!)$.

最后用调整法求 $L_{\min}$.

将 $\sqrt{3}i(i=1,2,\cdots,n)$ 取正号,$j(j=1,2,\cdots,n)$ 取负号.

若某个 $\sqrt{3}i_0$ 变成负号,则某个 $j_0(j_0>\sqrt{3}i_0)$ 需变成正号,这是由于

$$\left|j_0-\sqrt{3}i_0\right|=j_0-\sqrt{3}i_0.$$

从而,这 $2n$ 个数之和变大.

又 $\left|j-\sqrt{3}\right|=j-\sqrt{3}\ (j\neq1)$,故 $\sqrt{3}$ 必取负号.

为使 L 最小,则 2 取正号,其余符号不变.

故 $L_{\min}=\sqrt{3}\left(\dfrac{n(n+1)}{2}-2\times1\right)-$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}-2\times2\right)$$

$$=(\sqrt{3}-1)\frac{n(n+1)}{2}+4-2\sqrt{3}.$$

当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(n,n-1,\cdots,1)$ 时,取最小值.