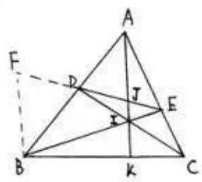
2018 年清华金秋营试题解答

第一天

1. 在ΔABC中，点D、E在边AB、AC上,$CD \cap BE = I, AI \cap DE = J, AI \cap BC = K$,

求$AJ \cdot AK$与AI^2的关系。



解：∵ΔAEJ 被直线CID所截

∴根据梅涅劳斯定理可得

$$\frac{AC}{CE}\cdot\frac{ED}{DJ}\cdot\frac{JI}{IA}=1$$

$$\Rightarrow\frac{IJ}{IA}=\frac{CE}{AC}\cdot\frac{DJ}{ED} \quad ①$$

∵ΔAEI被直线CKB所截

$$\therefore\frac{AC}{CE}\cdot\frac{EB}{BI}\cdot\frac{IK}{KA}=1$$

$$\Rightarrow\frac{IK}{KA}=\frac{CE}{AC}\cdot\frac{BI}{EB} \quad ②$$

过点B作AK的平行线与直线ED交与点F

∵$\angle FBC=\angle AKC=\angle ABC+\angle BAK>\angle ABC$

∴点F在ED的延长线上从而$\frac{EI}{BI}=\frac{EJ}{JF}<\frac{EJ}{JD}\Rightarrow\frac{EB}{BI}<\frac{ED}{JD}$

$\Rightarrow\frac{BI}{EB}>\frac{DJ}{ED}$ 再结合①②式可得$\frac{IK}{KA}>\frac{IJ}{IA}\Rightarrow\frac{AI}{AK}<\frac{AJ}{AI}$

因此$AJ\cdot AK>AK^2$

2. 证明：在平面上任给n个整点，存在一个次数不超过$\sqrt{2n}$的非零二元多项式使得这些整点都是它的零点。

证明：对于任意一个m次二元曲线的方程$\sum\limits_{\substack{0\le i,j\le m\\ i+j\le m}}a_{ij}x^iy^j=0$它是由$\binom{m+2}{2}$项$a_{i,j}x^iy^j$构成的，

由$\binom{m+2}{2}-1$个点可唯一确定这样的一个二元曲线。而由

$\binom{\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+2}{2}-1=\frac{\left(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+2\right)\left(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+1\right)}{2}-1>\frac{\left(\sqrt{2n}+1\right)\times\sqrt{2n}}{2}>n$ 可知存在一个次数不超过

$\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$的非零二元的多项式使得这些平面上的 n 个整点都是它的零点。

3. 设正整数 $n>2$ 证明：$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2n}}-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2n}}<\frac{1}{n^2\sqrt{1+n^2}}$.

证明：设 $x=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2n}},y=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2n}}$

则 $x^n-y^n=\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}-\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$

$$x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}>n\sqrt[n]{x^{n-1}\cdot x^{n-2}y\cdots xy^{n-2}\cdot y^{n-1}}$$

$$=n\cdot(xy)\frac{n-1}{2}$$

$$=n$$

因此 $x-y=\frac{x^n-y^n}{x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}}<\frac{1}{n^2\sqrt{n^2+1}}$

故 $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2n}}-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2n}}<\frac{1}{n^2\sqrt{n^2+1}}$

4. 是否存在正整数 $n\geq 2^{2018}$，使得不存在正整数 x,y,u,v 满足 $u,v>1$ 且 $n=x^u+y^v$。

解：存在

若正整数 n 能表示成 $x^u+y^v\,(x,y,u,v\in z^+$ 且 $u,v>1)$ 的形式，则称 n 为好数。下面证明：在大于等于 2^{2018} 的正整数中有非好数。

注意到，对于任意的正整数 m 有 $m^2\equiv 0,1(\bmod 4)$。因此，任意 $4k+3(k\in z)$ 型正整数都不能表示成两个正整数的平方和。

考虑集合 $s=\{n\,|\,n\equiv(\bmod 4)$ 且 $n\geq 2^{2018}\}$

对于任意的 $n\in s$。若 n 为好数，则 n 可表示成 x^u+y^v 且 u,v 中有一个 ≥ 3，不妨设 $u\geq 3$, 则 $x\leq\sqrt[3]{n},y\leq\sqrt{n}$.

现在，设 $N\in S$(N待定)

2

定义$T_N=\{x^u+y^v \mid x,y,u,v\in z^+ 且 x\le\sqrt[3]{N}, y\le\sqrt{N}, 3\le u\le\log_2 N, 2\le v\le\log_2 N\}$对于任意小于等于$N$且属于$S$的正整数，若它为好数，则必属于$T_N$.

$|T_N|<\sqrt[3]{N}\times\sqrt{N}\times(\log_2 N)^2=N^{\frac{5}{6}}(\log_2 N)^2$.

所有小于等于N且属于S的数共有$f(N)=\dfrac{N-(2^{2018}-1)}{4}$个。

当N充分大时，$\log_2 N<N^{\frac{1}{24}}$且$N>4N^{\frac{11}{12}}+(2^{2018}-1)$.

此时$f(N)=\dfrac{N-(2^{2018}-1)}{4}>N^{\frac{5}{6}}(\log_2 N)^2>|T_N|$.这说明小于等于$N$的好数的个数$<f(N)$，因此会存在$n\le N$且$n\in S$, n不为好数。

第二天

5.设一个凸的多边形和它的内部能被几个半径不必相等的圆盘完全覆盖,证明或否定:可以从这些圆盘中选出一些两两不交的圆盘,使得将它们的半径扩大三倍之后,可以覆盖原凸多边形。

证明：在这几个圆盘中，必有一个圆盘的半径最大（若有多个，从中任选一个），该圆盘为C_1，把圆C_1以及与它有公共点的所有圆盘去掉。同样在剩下的圆盘中必有一个圆盘的半径最大（若有多个，从中任选一个），记该圆盘为C_2，把圆盘C_2以及与它有公共点的圆盘去掉，再考虑剩下圆盘中半径最大的圆盘，按照这种方式进行下去，最后一定可以得到K个两两不交的圆盘$C_1,C_2,\cdots C_K$.

将圆盘C_i的半径扩大三倍得到圆盘$C_i'(i=1,2,\cdots,k)$,则圆盘C_i'能覆盖住圆盘C_i以及所有与C_i有公共点的圆盘。故圆盘$C_1',C_2',\cdots C_K'$能覆盖住原来的几个圆盘，而这几个圆盘能覆盖原凸多边形，因此圆盘$C_1',C_2',\cdots,C_K'$可以覆盖原凸多边形。

6.对前n个正整数用k种颜色染色，使得无法从中选出三个不同色的正整数构成等差数列。设k的最大值为$f(n)$。证明：$\log_3 n\le f(n)\le 1+\log_2 n.$

若对前若干个正整数分别染色，使得无法从中选出三个不同色的正整数构成等差数列，则称这种染色方式为好染色法。

先证明：对$\forall m\in z^+$有$f(2m)\le f(m)+1, f(2m+1)\le f(m)+1.$

3

设 $t\in\{0,1\}$，用 $f(2m+t)$ 种颜色对前 $2m+t$ 个正整数染色，可得到一种好染色法，再从中删去数 $m+1,m+2,\cdots,2m+t$ 后，将会得到对前 m 个正整数的一种好染色法，且 $f(2m+a)-1\le f(m)$（否则，至少有两种不同的颜色，他们只对 $m+1,m+2,\cdots,2m+a$ 中的某一些数进行染色，分别从这两种颜色的数中取其最小的数设为 $m+x,m+y,1\le x<y\le m+a$，考虑数 $m+2x-y$ 由 $m+2x-y\ge m+2-(m+a)=a-2\ge 1$，$m+2x-y<m+x$ 以及 $m+x,m+y$ 的最小性可知 $m+2x-y$ 所染的颜色与数 $m+x,m+y$ 的颜色不同。而 $m+2x-y,m+x,m+y$ 构成等差数列矛盾）

再证明：对 $\forall m\in z^{+}$ 有 $f(3m)\ge f(m)+1$，$f(3m+k)\ge f(m+1)+1$ 其中 $k\in\{1,2\}$.

首先 $f(3m)\ge f(m)+1$.

用 $f(m)$ 种颜色对前 m 个正整数染色，可得到一种好染色法，再对其每一个数 $a\in\{1,2,\cdots,m\}$，用 $3a$ 替换 a 且颜色不变，最后对所有 $b\le 3m$ 且 $b\not\equiv 0 \pmod 3$ 的正整数 b 用第 $f(m)+1$ 种颜色对其染色，这样得到了一种用 $f(m)+1$ 种颜色对前 $3m$ 个正整数染色的好染色法。因此，$f(m)+1\le f(3m)$

然后 $f(3m+k)\ge f(m+1)+1$，其中 $k\in\{1,2\}$

用 $f(m+1)$ 种颜色对前 $m+1$ 个正整数染色，可得到一种好染色法，再对其每一个数 $a'\in\{1,2,\cdots,m+1\}$，用 $3a'-3+k$ 替换 a' 且颜色不变，最后对所有 $b'\le 3m+1$ 且 $b\not\equiv k \pmod 3$ 的正整数 b' 用第 $f(m+1)+1$ 种颜色对其染色，这样得到了一种用 $f(m+1)+1$ 种颜色对前 $3m+k$ 个正整数染色的好染色法，因此，$f(m+1)+1\le f(3m+k)$。

7. 给定正整数 n，以及 n 个实数 $P_i\in(0,1)$，$i=1,2,\cdots,n$. 对集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集，定义 $P_I=\prod_{i\in I}P_i$，并且 $P_{\phi}=1$. 再对任意 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集 I，取一个实数 X_I，并且 $X_{\phi}=1$，

求证：$$\sum_{I\subseteq\{1,2,\cdots,n\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\cdots,n\}}\frac{X_IX_J}{P_{I\cap J}}\ge\prod_{i=1}^{n}(1-P_I)\qquad(*)$$

事实上可以对 n 用数学归纳法证明 $(*)$ 式，但需要一个辅助命题：对任意 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的

非空子集 I，取一个实数 X_I(不必需求 $X_\phi=1$), 则 $\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}\frac{X_IX_J}{P_{I\cap J}}\geq 0$ $(**)$（其中 P_I 的定义不变）

当 $n=1$ 时，$(*)$式左--右 $=\frac{X_1^2}{P_1}+2X_1+P_1=\frac{(X_1+P_1)^2}{P_1}\geq 0$

$(**)$式左边 $=X_\phi^2+2X_\phi X_1+\frac{X_1^2}{P_1}=(X_\phi+X_1)^2+X_1^2\left(\frac{1}{P_1}-1\right)\geq 0$

假设对于 $n=k$ 时，$(*)$,$(**)$都成立。

则对 $n=k+1$ 时

$$\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,k+1\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\ldots,k+1\}}\frac{X_IX_J}{P_{I\cap J}}=\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\frac{X_IX_J}{P_{I\cap J}}+\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\frac{X_{I\cup\{k+1\}}X_J}{P_{I\cap J}}$$

$$+\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\frac{X_IX_{J\cup\{k+1\}}}{P_{I\cap J}}+\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\frac{X_{I\cup\{k+1\}}X_{J\cup\{k+1\}}}{P_{k+1}P_{I\cap J}}$$

$$=\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\left(\frac{X_IX_J}{P_{I\cap J}}+\frac{X_{I\cup\{k+1\}}X_J}{P_{I\cap J}}+\frac{X_IX_{J\cup\{k+1\}}}{P_{I\cap J}}+\frac{X_{I\cup\{k+1\}}X_{J\cup\{k+1\}}}{P_{k+1}P_{I\cap J}}\right)$$

$$=(1-P_{k+1})\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\frac{X_IX_J}{P_{I\cap J}}+\frac{1}{P_{K+1}}\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\frac{(X_{I\cup\{k+1\}}+P_{k+1}X_I)(X_{J\cup\{k+1\}}+P_{k+1}X_J)}{P_{I\cap J}}$$

记上式为①式。令 $Y_I=X_{I\cup\{k+1\}}+P_{k+1}X_I$

根据 $n=k$ 时的归纳假设可知 $\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\frac{Y_IY_J}{P_{I\cap J}}\geq 0$

再结合①式可得：$\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,k+1\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\ldots,k+1\}}\frac{X_IX_J}{P_{I\cap J}}\geq(1-P_{K+1})\sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\sum_{J\subseteq\{1,2,\ldots,k\}}\frac{X_IX_J}{P_{I\cap J}}$

又由归纳假设可知：命题$(*)(**)$对 $n=k+1$ 时成立。

因此原命题成立。

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注