秘密★启用前

理科数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 若复数 $z=\frac{1+2i}{i}$，则 $z=$ A

A. $2-i$　　B. 2　　C. $2+i$　　D. -2

2. 已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{8}$，则 $\sin2\alpha=$ C

A. $-\frac{\sqrt{5}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{8}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{4}$　　D. $-\frac{\sqrt{5}}{8}$

3. 设 a，b，c 是实数，命题“$a>b>c>0$”是命题“$a+b>c$”的 A

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 执行如图1所示的程序框图，则输出的 S 值为 A

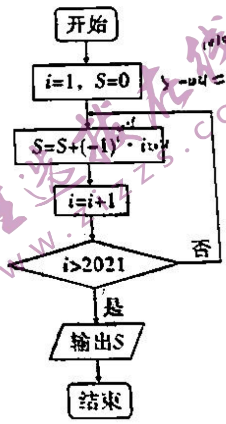

图1

A. -1011

B. 1011

C. -1010

D. 1010

5.《易经》中记载："易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦"，意思是说：一分为二，二分为四，四分为八. 可以说这是2进制思想的萌芽. 在书中，两仪采用符号"—"（阳爻）和"- -"（阴爻），从计数法的角度研究，将阳爻视为1，阴爻视为0，每次取3个符号如：☲表示二进制下的数101（即十进制下的数5）；☶☲所表示的二进制下的数为001101（即十进制下的数13），根据所述规则，☱☲表示十进制下的数为 D

A. 19　　B. 22　　C. 24　　D. 25

6. 已知从某市市郊乘车前往该市的高铁站有 1 号线和 2 号线可走，1 号线穿过市区、路程短但交通拥挤，所需时间 X（单位：分钟）服从正态分布 $N(50,\ 100)$；2 号线走绕城公路、路程长但阻塞较少，所需时间 Y（单位：分钟）服从正态分布 $N(60,\ 16)$．若住该市市郊同一小区的明明和亮亮两人分别有 69 分钟和 64 分钟可用，要使两人按时到达高铁站的可能性更大，则明明、亮亮两人应选择的路线分别是 B

A. 1 号线、2 号线　　B. 2 号线、1 号线

C. 1 号线、1 号线　　D. 2 号线、2 号线

7. 已知 F 是抛物线 C：$y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点，O 为坐标原点，过 F 的直线交 C 于 A，B 两点，则三角形 OAB 面积的最小值为 D．

$x^2=4y$

A. $\frac{1}{128}$　　B. $\frac{1}{32}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

8. 已知函数 $f(x)=\frac{2^x}{4}-\frac{4}{2^x}+1$，则 $f(-3)+f(-2)+\cdots+f(6)+f(7)=$ C．

A. 0　　B. 5　　C. 11　　D. 15

9. 设首项为 a_1、公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数，S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 3，15，21 是数列 $\{a_n\}$ 中的三项．命题 p：对任意满足条件的 d，存在 a_1，使得 30 一定是数列 $\{a_n\}$ 中的一项；命题 q：存在满足条件的数列 $\{a_n\}$，使得对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_{2n}=4S_n$ 成立．则下列命题中的真命题是 D．

A. $p\wedge q$　　B. $(\neg p)\wedge q$

C. $p\wedge(\neg q)$　　D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$

10. 一列波沿 x 轴正方向传播，其波函数的表达式为 $f(x)=A_1\cos(\omega_1x+\varphi_1)$（$A_1>0$，$\omega_1>0$，$\pi>\varphi_1>0$，$0\leqslant x\leqslant 2$），$\frac{5}{12}$，$\frac{11}{12}$ 是函数 $f(x)$ 相邻的两个零点；另一列波沿 x 轴负方向传播，其波函数的表达式为 $g(x)=\sin\left(2\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$（$0\leqslant x\leqslant 2$）；在某一时刻，两列波的图象如图 2 所示；函数 $h(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ 表示两列波叠加之后的波函数（叠加后的波函数为原来两个波函数的和），则下列说法正确的有 B

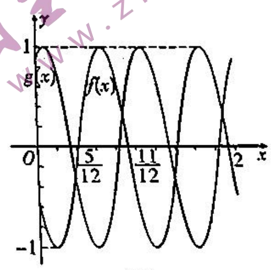

图 2

①$\omega_1=2\pi$；②$x=\frac{1}{3}$ 是函数 $g(x)$ 的一个零点；③函数 $h(x)$ 的最小正周期是 $\frac{1}{2}$；

④函数 $h(x)$ 的振幅为 1；⑤函数 $h(x)$ 的振幅为 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$．

A. ①②④　　B. ①②⑤

C. ②③④　　D. ③④⑤

11. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=\frac{\pi}{3}$，$\triangle PAB$，$\triangle PAC$，$\triangle PBC$ 的面积分别记为 S_1、S_2、S_3，且 $3S_1=2S_2=2S_3=3\sqrt{3}$，则此三棱锥的内切球的半径为

A. $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}{7}$　　C. $\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}+1}{6}$

12. 已知函数 $f(x)=ax-x^2+\ln x-xe^x-e$，若函数 $f(x)$ 有两个不同的零点，则实数 a 的取值范围为 C

A. $(1,\ +\infty)$　　B. $(1+e,\ +\infty)$　　C. $(1+2e,\ +\infty)$　　D. $(1+3e,\ +\infty)$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $A(1,-1,3)$、$B(7,0,2)$为空间直角坐标系中的两个点，$\vec{m}=(2,\lambda,\mu)$，若$\vec{m}/\!/\overrightarrow{AB}$，则$\lambda+\mu=$__0__.

14. 有 A、B 两种细菌，若每个细菌 A 在一个单位时间内能杀死 1 个细菌 B，并且 A 在杀死 B 的同时将自身分裂成 2 个同样的细菌，现有 1 个细菌 A 和 914 个细菌 B，则细菌 A 将细菌 B 全部杀死，至少需要__10.__个单位时间.

15. 已知 O 为坐标原点，$\odot O_1$：$x^2+y^2=4$，$\odot O_2$：$x^2+y^2=1$，A 是$\odot O_1$上的动点，连接 OA，线段 OA 交$\odot O_2$于点 B，过 A 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 C，过 B 作 AC 的垂线交 AC 于点 D，则点 D 的轨迹方程为________.

16. 如图 3 所示，有一块三角形的空地，已知$\angle ABC=\frac{7\pi}{12}$，$BC=4\sqrt{2}$千米，$AB=4$千米，则$\angle ACB=$__30°__；现要在空地中修建一个三角形的绿化区域，其三个顶点为 B，D，E，其中 D，E 为 AC 边上的点，若$\angle DBE=\frac{\pi}{6}$，则 $BD+BE$ 的最小值为______千米.（第一空 2 分，第二空 3 分）

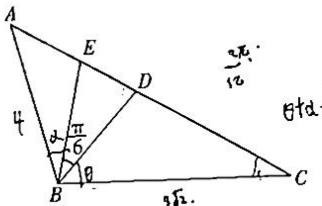

图 3

三、解答题（共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. （本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_{n+1}=2(a_1+a_2+\cdots+a_n+n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$，设$b_n=a_n+1$.

（1）证明：数列$\{b_n\}$是等比数列；　$b_n=3^n$.

（2）求数列$\{nb_n\}$的前 n 项和 T_n.　$T_n=\frac{2n-1}{4}\cdot 3^{n+1}+\frac{3}{4}$

18. （本小题满分 12 分）

为纪念中国共产党成立 100 周年，某学校组织党史知识竞赛，竞赛规则是：两人组成一个"组合"，进行多轮竞赛，每一轮竞赛中，一个"组合"的两人分别各答 3 道题，若答对的题目总数不少于 5 道题时，此"组合"获得 20 分. 已知小华和小夏两人组成"华夏组合"，小华、小夏每道题答对的概率分别是$\frac{4}{5}$和$\frac{3}{4}$，且每道题答对与否互不影响.

（1）求"华夏组合"在一轮竞赛中获得 20 分的概率；　$\frac{297}{500}$

（2）若每轮竞赛互不影响，"华夏组合"期望至少要获得 100 分，则理论上至少要进行多少轮竞赛？　9.

19. （本小题满分 12 分）

如图 4，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面是边长为 4 的菱形，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，$E$，$F$ 分别是棱 BC，CD 的中点，且

________.

①平面 $PEF\perp$ 平面 $ABCD$；②$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF})=0$；从①，②这两个条件中任选一个，补充在题设中的横线上，并完成解答.

（1）求证：$AC\perp PE$；

（2）若 $PC=3$，且 $PE=PF$，求平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值.

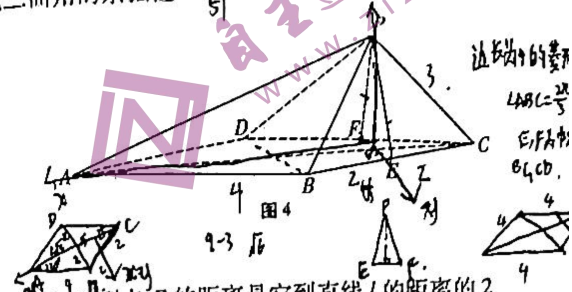

图4

20.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l：$x=1$，点 $F(4,0)$，动点 P 到点 F 的距离是它到直线 l 的距离的 2 倍，记 P 的轨迹为曲线 C.

（1）求曲线 C 的方程；

（2）过点 F 且斜率大于 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于 A，B 两点，点 $Q(-2,0)$，连接 QA，QB 交直线 l 于 M，N 两点，证明：点 F 在以 $|MN|$ 为直径的圆上.

21.（本小题满分 12 分）

（1）设 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq b$，证明：$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$；

（2）若函数 $f(x)=4mx-3m\sin x-2m\ln x$，且 m 为非零实数，若存在 x_1，x_2，且 $x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x_1\cdot x_2<4$.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致，在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t,\\ y=1-t,\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点、x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2(3+\sin^2\theta)=12$.

（1）求曲线 C 的直角坐标方程；$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）若直线 l 与曲线 C 交于 A，B 两点，点 P 的坐标为 $(1,1)$，求 $|PA|+|PB|$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|2x-1|+|x-a|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant 2$ 的解集；

（2）$\forall x\in\mathbf{R}$，不等式 $f(x)\geqslant 3$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.