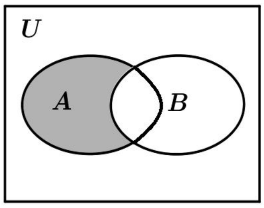
长治市第二中学校2020-2021学年高二下学期期末考试

数学试题（理科）

【满分150分，考试时间120分钟】

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\left\{x \mid x(x-2)<0\right\}$，$B=\left\{x \mid |x| \le 1\right\}$，则下图阴影部分表示的集合是（　　）



A．$[-1,0)$　　　B．$[-1,0)\cup[1,2)$

C．$(1,2)$　　　D．$(0,1)$

2．某高校《统计》课程的教师随机给出了选该课程的一些情况，具体数据如下：

	非统计专业	统计专业
男	13	10
女	7	20

为了判断选修统计专业是否与性别有关，根据表中数据，K^2的观测值$k\approx 4.844>3.841$，所以可以判定选修统计专业与性别有关.那么这种判断出错的可能性为(　　)

A．5%　　B．95%　　C．1%　　D．99%

附：

$P(K^2\ge k_0)$	0.100	0.050	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

3．设$a\in R$，则“$a\ge 2$”是“$a^2-3a+2\ge 0$”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知命题p：“$\forall a>b, |a|>|b|$”，命题q：“$\exists x_0<0, 2^{x_0}>0$”，则下列为真命题的是(　　)

A．$p\wedge q$　　B．$\neg p\wedge\neg q$　　C．$p\vee q$　　D．$p\vee\neg q$

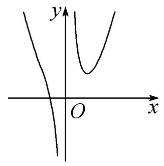
5．若$a>b>c$，$a+b+c=0$，则（　　）

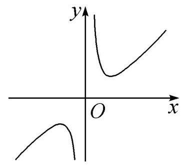
A．$ab>ac$　　B．$ac>bc$　　C．$ab>bc$　　D．$b^2>c^2$

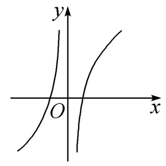
6．若$\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$的展开式中第四项为常数项，则$n=$(　　)

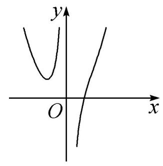
A．4　　　　B．5　　　　C．6　　　　D．7

7．已知函数 $f\left(x\right)=x^{2}-\dfrac{\ln\left|x\right|}{x}$，则函数 $y=f\left(x\right)$ 的大致图象为(　　)

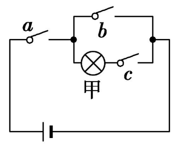
A. 

B. 

C. 

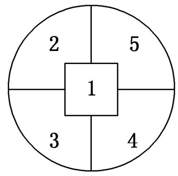
D. 

8．如图所示的电路，有 a，b，c 三个开关，每个开关开或关的概率都是 $\dfrac{1}{2}$，且是相互独立的，则灯泡甲亮的概率为(　　)



A．$\dfrac{1}{8}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{1}{16}$

9．如图，花坛内有 5 个花池，有 5 种不同颜色的花卉可供栽种，每个花池内只能种同种颜色的花卉，相邻两池的花色不同，则栽种方案的种数为(　　)



A．180　　　　B．240

C．360　　　　D．420

10．函数 $f\left(x\right)=\sqrt{2x+1}+x$ 的值域是(　　)

A．$\left[0,+\infty\right)$　　B．$\left(-\infty,0\right]$　　C．$\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D．$\left[1,+\infty\right)$

11．方舱医院的创设，在抗击新冠肺炎疫情中发挥了不可替代的重要作用.某方舱医院医疗小组有七名护士（甲乙丙丁戊己庚)，每名护士从周一到周日轮流安排一个夜班.若甲的夜班比丙晚一天，丁的夜班比戊晚两天，乙的夜班比庚早三天，己的夜班在周四，且恰好在乙和丙的正中间，则周五值夜班的护士为(　　)

A．甲　　B．丙　　C．戊　　D．庚

12．已知定义在 R 上的连续奇函数 $f\left(x\right)$ 的导函数为 $f'\left(x\right)$，当 $x>0$ 时，$f'\left(x\right)+\dfrac{f\left(x\right)}{x}>0$，则使得 $2xf\left(2x\right)+\left(1-3x\right)f\left(3x-1\right)>0$ 成立的 x 的取值范围是(　　)

A．$\left(1,+\infty\right)$　　B．$\left(-1,\dfrac{1}{5}\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　　C．$\left(\dfrac{1}{5},1\right)$　　D．$\left(-\infty,1\right)$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．假设关于某设备的使用年限 x(单位：年)和所支出的维修费用 y(单位：万元)有如下的统计资料：

x/年	2	3	4	5	6
y/万元	2.2	3.8	5.5	6.5	7.0

若由资料可知 y 对 x 呈线性相关关系，且线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中已知

$\hat{b}=1.23$，请估计是要年限为20年时，维修费用约为____________（万元）.

14．随机变量ξ的取值为0，1，2.若 $P(\xi=0)=\dfrac{1}{5}$，$E(\xi)=1$，则 $D(\xi)=$________.

15．若正数 x，y 满足 $xy^2=4$，则 $x+2y$ 的最小值为__________.

16．已知函数 $f(x)=x^2-2mx+e^{2x}-2me^x+2m^2$，若存在实数 x_0，使得 $f(x_0)\le\dfrac{1}{2}$ 成立，则实数 $m=$_________.

三、选做题：共10分.请考生在17、18题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

17．(本小题满分10分) 已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\dfrac{9}{\cos^2\theta+9\sin^2\theta}$，以平面直角坐标系 xOy 的原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴并取相同的单位长度建立极坐标系.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程；

(2)A，B 为曲线 C 上两点，若 $OA\perp OB$，求 $\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}$ 的值.

18．(本小题满分10分) 已知 $a>0,b>0$.

(1)求证：$\sqrt{ab}\ge\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$；

(2)若 $a>b$，且 $ab=2$，求证：$\dfrac{a^2+b^2}{a-b}\ge4$.

四、选做题：共12分.请考生在19、20题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

19．（本小题满分12分）【选修4-4：坐标系与参数方程】

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t为参数)，以平面直角坐标系 xOy 的原点为极点，x 轴的非负半轴为极轴并取相同的单位长度建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+1=0$.

(1) 求直线 l 的普通方程，曲线 C 的直角坐标方程；

(2) 设直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点，点 Q 在 C 上运动，求 ΔABQ 面积的最大值.

20．（本小题满分 12 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|x-a|+|x+b|+c$，其中 a,b,c 为正实数.

(1) 当 $a=b=c=2$ 时，求不等式 $f(x)<10$ 的解集；

(2) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 1，求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值.

五、解答题：本大题共 4 小题，每小题 12 分，共 48 分.

21．(本题满分 12 分)

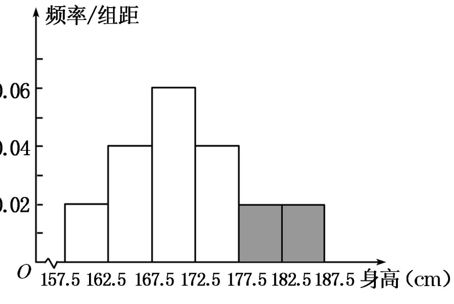
设函数 $f\left(x\right)=\ln x-\dfrac{1}{2}ax^2-bx$

(1)当 $a=b=\dfrac{1}{2}$ 时，求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)当 $a=0$，$b=-1$ 时，方程 $f\left(x\right)=mx$ 在区间 $\left[1,e^2\right]$ 内有唯一实数解，求实数 m 的取值范围.

22．(本题满分 12 分)

某省 2021 年全省高中男生身高统计调查数据显示：全省 100 000 名男生的身高服从正态分布 $N(170.5，16)$．现从我校高三年级男生中随机抽取 50 名测量身高，测量发现被测学生身高全部介于 157.5 cm 和 187.5 cm 之间，将测量结果按如下方式分成 6 组：第一组[157.5，162.5)，第二组[162.5，167.5)，…，第六组[182.5，187.5]．下图是按上述分组方法得到的频率分布直方图.



(1)试评估我校高三年级男生在全省高中男生中的平均身高状况；

(2)求这 50 名男生身高在 177.5 cm 以上(含 177.5 cm)的人数；

(3)在这 50 名男生身高在 177.5 cm 以上(含 177.5 cm)的人中任意抽取 2 人，该 2 人中身高排名(从高到低)在全省前 130 名的人数记为ξ，求ξ的均值．参考数据：若

$\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) = 0.6826$ ，$P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$ ，$P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$.

23．(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{2}ax - b$ ，$g(x) = ax^2 + bx$.

(1)当 $a = 2$ ，$b = -3$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $x = e$ 处的切线方程，并求函数 $f(x)$ 的最大值；

(2)若函数 $y = f(x)$ 的两个零点分别为 x_1 ，x_2 且 $x_1 \neq x_2$ ，求证：$g\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) > 1$.

24．(本题满分 12 分)

如图，小华和小明两个小伙伴在一起做游戏，他们通过划拳(剪刀、石头、布)比赛决定谁先登上第 3 个台阶.他们规定从平地开始，每次划拳赢的一方登上一级台阶，输的一方原地不动，平局时两个人都上一级台阶，如果一方连续两次赢，那么他将额外获得一次上一级台阶的奖励，除非已经登上第 3 个台阶，当有任何一方登上第 3 个台阶时，游戏结束，记此时两个小伙伴划拳的次数为 x.

(1)求游戏结束时小华在第 2 个台阶的概率；

(2)求 x 的分布列和数学期望.