2023年东北三省四市教研联合体高考模拟试卷（二）

数学试卷

（本试卷满分150分，考试时间120分钟）

注意事项：1. 答题前，考生务必用黑色字迹的签字笔或钢笔将自己的姓名、准考证号分别填写在试卷和答题卡规定的位置上。

2. 答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡对应题目的答案涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再涂其它答案。非选择题的答案必须使用黑色字迹的签字笔或钢笔写在答题卡上相应的区域内，写在本试卷上无效。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x\leqslant 0, x\in \mathbb{Z}\}$，$B=\{x\mid -2<x<2\}$，则 $A\cap B=$

A. $[-1,0]$　　B. $[0,2)$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_4+a_{10}+a_{12}=40$. 则前13项和 $S_{13}=$

A. 133　　B. 130　　C. 125　　D. 120

3. 要得到函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$ 的图象，只需把函数 $g(x)=\sin 2x$ 的图象

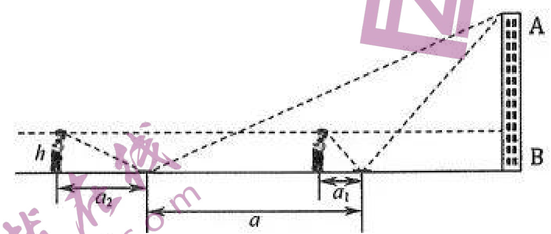
A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度　　D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(0,5)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1)$，则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的坐标为

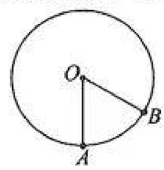
A. $(0,1)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,-1)$　　D. $(1,0)$

5. 哈尔滨防洪胜利纪念塔，坐落在风景如画的松花江南岸，是为纪念哈尔滨市人民战胜1957年的特大洪水，于1958年建成的，是这座英雄城市的象征，它象征着20世纪的哈尔滨人民力量坚不可摧. 小明同学想利用镜面反射法测量防洪纪念塔主体的高度. 如图所示，小明测量并记录人眼距离地面高度 h m，将镜子（平面镜）置于平地上，人后退至从镜中能够看到楼顶的位置，测量人与镜子的距离为 a_1 m，将镜子后移 a m，重复前面中的操作，测量人与镜子的距离为 a_2 m. 根据数据可求出防洪纪念塔AB的高度为（单位：m）



A. $\frac{ah}{a_2+a_1}$　　B. $\frac{ah}{a_2-a_1}$　　C. $\frac{a}{a_2+a_1}+h$　　D. $\frac{a}{a_2-a_1}+h$

6. 如图，圆 O 的半径为1，从中剪出扇形 AOB 围成一个圆锥（无底），所得的圆锥的体积的最大值为



A. $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$

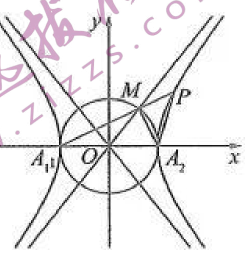
C. $\frac{4}{9}\sqrt{3}\pi$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$

7. 已知 $a=-\frac{5}{4}\ln\frac{4}{5}$，$b=\frac{e^{0.25}}{4}$，$c=\frac{1}{3}$，则

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左，右顶点分别是 A_1，A_2，圆 $x^2+y^2=a^2$ 与 C 的渐近线在第一象限的交点为 M，直线 A_1M 交 C 的右支于点 P. 设 $\triangle MPA_2$ 的内切圆圆心为 I，$A_2I\perp x$ 轴，则 C 的离心率为 来源：高三答案公众号



A. 2　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

二、多项选择题：(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.)

9. 已知 a,b,l 为不同的直线，α,β,γ 为不同的平面，则下列说法正确的是

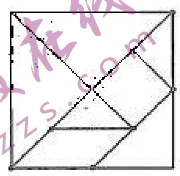
A. 若 $\alpha // \beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则 $a // b$

B. 若 $a\perp\alpha$，$b\subset\beta$，$\alpha // \beta$，则 $a\perp b$

C. 若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\perp b$，则 a,b 至少有一条与直线 l 垂直

D. 若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\perp\gamma$，$\beta\cap\gamma=l$，则 $l\perp\alpha$

10. 七巧板是古代中国劳动人民的发明，顾名思义，它由七块板组成，其中包括五个等腰直角三角形，一个正方形和一个平行四边形. 利用七巧板可以拼出人物、动物等图案一千余种. 下列说法正确的是



A. 七块板中等腰直角三角形的直角边边长有 3 个不同的数值，它们的比为 $1:\sqrt{2}:2$

B. 从这七块板中任取两块板，可拼成正方形的概率为 $\frac{1}{7}$

C. 从这七块板中任取两块板，面积相等的概率为 $\frac{5}{21}$

D. 使用一套七巧板中的 n 块($1\leqslant n\leqslant 7$，$n\in N_+$)，可拼出不同大小的正方形 3 种

11. 设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，P 为其上一动点. 当 P 运动到点 $(2,t)$ 时，$|PF|=4$，直线 l 与抛物线相交于 A,B 两点，点 $M(4,1)$. 下列结论正确的是

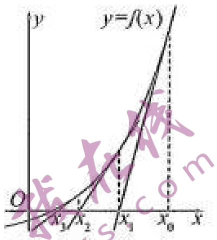
A. 抛物线的方程为 $y^2=4x$

B. $|PM|+|PF|$ 的最小值为 6

C. 以 PF 为直径的圆与 y 轴相切

D. 若以 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切，则直线 AB 过焦点 F

12. 人们很早以前就开始探索高次方程的数值求解问题. 牛顿在《流数法》一书中给出了牛顿迭代法:用"做切线"的方法求方程的近似解. 具体步骤如下:设 r 是函数 $y=f(x)$ 的一个零点,任意选取 x_0 作为 r 的初始近似值,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线为 l_1,设 l_1 与 x 轴交点的横坐标为 x_1,并称 x_1 为 r 的 1 次近似值;曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线为 l_2,设 l_2 与 x 轴交点的横坐标为 x_2,称 x_2 为 r 的 2 次近似值. 一般地,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_n,f(x_n))(n\in\mathbf{N}_+)$ 处的切线为 l_{n+1},记 l_{n+1} 与 x 轴交点的横坐标为 x_{n+1},并称 x_{n+1} 为 r 的 $n+1$ 次近似值. 在一定精确度下,用四舍五入法取值,当 x_n 与 x_{n+1} 的近似值相等时,该近似值即作为函数 $f(x)$ 的一个零点 r 的近似值. 下列说法正确的是



A. $x_{n+1}=x_n+\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}(f'(x_n)\neq 0)$

B. 利用牛顿迭代法求函数 $f(x)=x^3-6$ 的零点 r 的近似值(精确到 0.1),取 $x_0=2$,需要做两条切线即可确定 r 的近似值

C. 利用二分法求函数 $f(x)=x^3-6$ 的零点 r 的近似值(精确度为 0.1),给定初始区间为 $(1,2)$,需进行 4 次区间二分可得到零点 r 的近似值

D. 利用牛顿迭代法求函数 $f(x)=\ln x+2x-b(b>2)$ 的零点 r 的近似值,任取 $x_0\in(1,r)$,总有 $x_n<x_{n+1}<r$

三、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.)

13. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3}=1(a>0)$ 过点 $(-2,1)$,则其渐近线方程为________.

14. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,上、下底面边长分别为 $3\sqrt{2}$,$4\sqrt{2}$,该正四棱台的外接球的表面积为 100π,则该正四棱台的高为________.

15. 有一个密码锁,它的密码是由三个数字组成的. 只有当我们正确输入每个位置的数字时,这个密码锁才能够打开. 现如今我们并不知道密码是多少,当输入 246 时,提示 1 个数字正确,并且位置正确;输入 258 时,提示 1 个数字正确,但位置错误;输入 692 时,提示 2 个数字正确,但位置全错;输入 174 时,提示没有一个数字是对的;输入 419 时,提示 1 个数字正确,但位置错误. 则正确的密码为________.

16. 已知函数 $f(x)=(1-x)e^x$,若关于 x 的方程 $2[f(x)]^2-4af(x)+1=0$ 有两个不同的实数根时,实数 a 的取值范围是________.

四、解答题:(本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

在 ①$b\sin\dfrac{A+B}{2}=c\sin B$;②$\sqrt{3}\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=2S_{\triangle ABC}$;③$\sqrt{3}\sin A+\cos A=\dfrac{a+b}{c}$

这三个条件中任选一个,补充在下面的问题中,并解答问题.

在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且满足________.

(Ⅰ)求角 C;

(Ⅱ)若 $\triangle ABC$ 的面积为 $8\sqrt{3}$,AC 的中点为 D,求 BD 的最小值.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$na_{n+1}-(n+1)a_n=2(n^2+n)$　$(n\in\mathbb{N}_+)$

（Ⅰ）证明：数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$是等差数列，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=\dfrac{2n+1}{a_na_{n+1}}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，若$T_n<\dfrac{\lambda n}{n+1}(n\in\mathbb{N}_+)$恒成立，试求实数$\lambda$的取值范围．

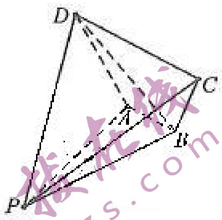
19.（本小题满分 12 分）

在世界杯期间，学校组织了世界杯足球知识竞赛，有单项选择题和多项选择题（都是四个选项）两种：

（Ⅰ）甲在知识竞赛中，如果不会单项选择题那么就随机猜测．已知甲会单项选择题和甲不会单项选择题随机猜测的概率分别是$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{3}$．问甲在做某道单项选择题时，在该道题做对的条件下，求他会这道单项选择题的概率；

（Ⅱ）甲在做某多项选择题时，完全不知道四个选项正误的情况下，只好根据自己的经验随机选择，他选择一个选项、两个选项、三个选项的概率分别为 0.5，0.3，0.2．已知多项选择题每道题四个选项中有两个或三个选项正确，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选择错误的得 0 分．某个多项选择题有三个选项是正确的，记甲做这道多项选择题所得的分数为X，求X的分布列及数学期望．

20.（本小题满分 12 分）



如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$AB\parallel CD$且$2AB<CD$，其中$\triangle PAD$为等腰直角三角形，$AP=4$，$\angle PDA=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle PAB=\dfrac{\pi}{4}$，且平面$PAB\perp$平面$PAD$，$DB\perp BA$．

（Ⅰ）求AB的长；

（Ⅱ）若平面PAC与平面ACD夹角的余弦值是$\dfrac{\sqrt{3}}{15}$，求CD的长．

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点$F$与抛物线$E:y^2=2px(p>0)$的焦点相同，曲线$C$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，$P(2,y)$为$E$上一点且$|PF|=3$．

（Ⅰ）求曲线C和曲线E的标准方程；

（Ⅱ）过F的直线交曲线C于H、G两点，若线段HG的中点为M，且$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{OM}$，求四边形$OHNG$面积的最大值．

22.（本小题满分 12 分）

已知$f(x)=(ax-1)e^x$与$g(x)=x(\ln x-a)$有相同的最小值．

（Ⅰ）求实数a的值；

（Ⅱ）已知$m<0$，函数$F(x)=xf(x)-m$有两个零点x_1,x_2，求证：$x_1\cdot x_2>-m^2-m$．

一、单选题

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	A	C	B	D	A	B

二、

9	10	11	12
BCD	AC	BCD	BCD

三、填空题

13. $x+y=0$ 和 $x-y=0$

14. 1 或 7

15. 986

16. $\{a \mid a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a>\frac{3}{4}\}$

17.(1)选①$b\sin\frac{A+B}{2}=c\sin B$，由正弦定理可得

$\sin B\sin\frac{A+B}{2}=\sin C\sin B$，

又因为$0<B<\pi$，可得$\sin\frac{A+B}{2}=\sin C$ ....2 分

即$\sin\frac{\pi-C}{2}=\sin C$，所以$\cos\frac{C}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$，

又因为$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$ ……………………………4 分

所以$\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$，解得$C=\frac{\pi}{3}$ ……………………………………………5 分

选②由题意

$\sqrt{3}\,\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=2S_{\triangle ABC}$，$\sqrt{3}abc\cos C=2\times\frac{1}{2}ab\sin C$，……2 分

$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\sqrt{3}$, …………………… ……………………………4 分

$\because C\in(0,\pi)$, $\therefore C=\frac{\pi}{3}$ …………… ……………………………5 分

选③$\sqrt{3}\sin A+\cos A=\frac{a+b}{c}$，

由正弦定理可得

$\sqrt{3}\sin A\sin C+\cos A\sin C=\sin A+\sin B$, $\sqrt{3}\sin A\sin C+\cos A\sin C=\sin A+\sin(A+C)$,

$\sqrt{3}\sin A\sin C+\cos A\sin C=\sin A+\sin A\cos C+\cos A\sin C$, $\sqrt{3}\sin C=1+\cos C$,

…………………………………………………2 分

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\frac{1}{2}\cos C=\frac{1}{2}$, $\sin(C-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$, ………………………………4 分

$\because C\in(0,\pi)$, $\therefore C-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi)$ $\therefore C=\frac{\pi}{3}$ …………5 分

（2）$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$

解得 $ab=32$， ……………………………………………………7 分

由余弦定理可得

$$BD^2=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-2a\cdot\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=a^2+\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2}ab\ge 2\cdot a\cdot\frac{b}{2}-\frac{1}{2}ab=16,$$

所以 $BD\ge 4$ ， ……………………………………………………9 分

当且仅当 $a=\dfrac{b}{2}$ 时，即 $a=4,b=8$ 取等号，

所以 BD 的最小值为 4 ………………………………10 分

18. (1)

$\because na_{n+1}-(n+1)a_n=2n(n+1)$，$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=2$， ……2 分

$\therefore$ 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是首项 $\dfrac{a_1}{1}=2$，公差为 2 的等差数列，…3 分

$\dfrac{a_n}{n}=2+(n-1)2=2n$， ……………………………………5 分

$\therefore a_n=2n^2$ ……………………………………………………………6 分

(2) $b_n=\dfrac{2n+1}{a_na_{n+1}}$，可得 $b_n=\dfrac{2n+1}{2n^2\,2(n+1)^2}=\dfrac{2n+1}{4n^2(n+1)^2}=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$，

……………………………………………………………………7 分

$$T_n=\frac{1}{4}\left[(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2})+(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})+\dots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{1}{4}\times\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$$

……………………………………………………9 分

解得 $ab=32$， ……………………………………7 分

由余弦定理可得

$$BD^2=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-2a\cdot\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=a^2+\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2}ab\geq 2\cdot a\cdot\frac{b}{2}-\frac{1}{2}ab=16,$$

所以 $BD\geq 4$ ， ……………………………………9 分

当且仅当 $a=\frac{b}{2}$ 时，即 $a=4,b=8$ 取等号，

所以 BD 的最小值为 4 ……………………………10 分

18. (1)

$\because na_{n+1}-(n+1)a_n=2n(n+1)$，$\therefore \frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=2$， ……2 分

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项 $\frac{a_1}{1}=2$，公差为 2 的等差数列，…3 分

$$\frac{a_n}{n}=2+(n-1)2=2n,$$ ……………………………5 分

$\therefore a_n=2n^2$ ……………………………………………6 分

(2) $b_n=\frac{2n+1}{a_na_{n+1}}$，可得 $b_n=\frac{2n+1}{2n^2 2(n+1)^2}=\frac{2n+1}{4n^2(n+1)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$，

……………………………………………………7 分

$$T_n=\frac{1}{4}\left[(1^2-\frac{1}{2^2})+(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})+\ldots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{1}{4}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{1}{4}\times\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$$

……………………………………………9 分

$T_n < \frac{\lambda n}{n+1}$，即$\frac{1}{4}\times\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+1}\lambda$，即$\frac{1}{4}\times\frac{n+2}{n+1} < \lambda$恒成立。

……………………………………………………10 分

$\lambda > \left[\frac{1}{4}(1+\frac{1}{n+1})\right]_{\max} = \frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$，

……………………………………………11 分

$\therefore \lambda > \frac{3}{8}$ ……………………………………………………………12 分

19.解：（1）记事件A为“该单项选择题回答正确”，事件B为“甲会该单项选择题”，

$\because P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{2}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ …3 分

$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{9}$，

甲在做某道单项选择题时，在该道题做对的条件下，他会这道单项选择题的概率是$\frac{8}{9}$． ……………………………5 分

（2）由题意知：X 所有可能的取值为 0,2,5，…………6 分

设事件A_i表示甲选择了i个选项，事件C表示选择的选项是正确的，

$\therefore P(X=2)=P(A_1C)+P(A_2C)=0.5\times\frac{C_3^1}{C_4^1}+0.3\times\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{21}{40}$ ……7 分

$P(X=5)=P(A_3C)=0.2\times\frac{C_3^3}{C_4^3}=\frac{1}{20}$； ………………………………8 分

$P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=5)=\frac{17}{40}$ ……………………………9 分

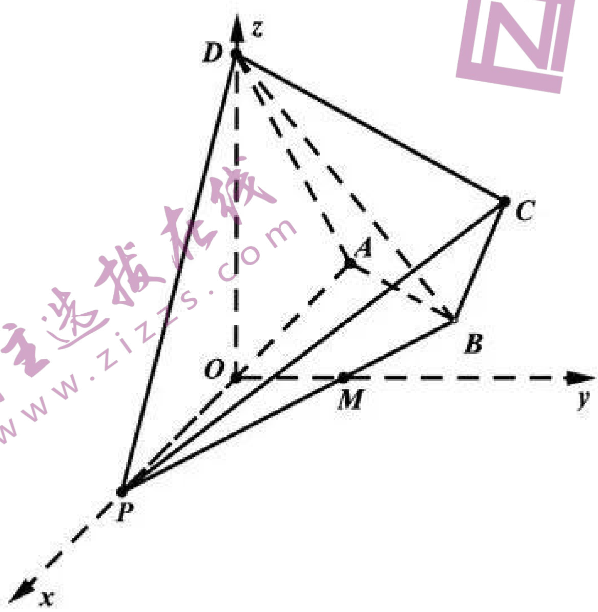
X 的分布列为：

X	0	2	5
P	$\frac{17}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{1}{20}$

……………………………………………………………10 分

$\therefore E(X)=0\times\frac{17}{40}+2\times\frac{21}{40}+5\times\frac{1}{20}=\frac{13}{10}$ ………………12 分

19.解：



取 AP 的中点 O，则 $OD \perp AP$，又∵平面 $PAB \perp$ 平面 PAD

平面 PAB ∩ 平面 PAD=AP，OD ⊂ 平面 PAD

$\therefore DO \perp$ 平面 APB ……………………2 分

$\therefore DO \perp AB$ ……………………3 分

$\because DB \perp BA, DO \cap DB = D$ $\therefore AB \perp$ 平面 DOB ……………4 分

$\therefore AB \perp BO$ ……………………5 分

又 $\angle PAB = \frac{\pi}{4}$ $\therefore AB = \frac{\sqrt{2}}{2}AO = \sqrt{2}$ ……………………6 分

（2）在平面 APB 内过 O 作 AP 的垂线 OM

以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OD}$ 正方向为 x, y, z 轴，可建立如图所示空间直角坐标系，

则 $A(-2,0,0)$，$B(-1,1,0)$，$D(0,0,2)$，$P(2,0,0)$，

$\overrightarrow{AB} = (1,1,0), \overrightarrow{AD} = (2,0,2)$ ……………………7 分

设平面 DAB 的法向量为 $\vec{n} = (a,b,c)$，

$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = a + b = 0 \\ \overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = 2a + 2c = 0 \end{cases}$，取 $n = (-1,1,1)$ ……………………8 分

设 $\overrightarrow{DC} = t\overrightarrow{AB}(t > 2)$ $\therefore \overrightarrow{DC} = (t,t,0)$ $\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = (t+2, t, 2)$，

设平面 ACP 的法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$，$\overrightarrow{AP} = (4,0,0)$

$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{m}=(t+2)x+ty+2z=0\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{m}=4x=0\end{cases}$，$\therefore\ \overrightarrow{m}=\left(0,2,-t\right)$…9 分

∵平面 PAC 与平面 ACD 夹角的余弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{15}$

$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{15}=|\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>|=\frac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\frac{|2-t|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{t^2+4}}$ …………10 分

$\therefore\ 6t^2-25t+24=0\ \therefore\ (3t-8)(2t-3)=0$

$\therefore t=\frac{8}{3}$ 或 $t=\frac{3}{2}$（舍）…………………………………………11 分

$\therefore CD=\frac{8}{3}\sqrt{2}$ ……………………………………………………12 分

21.

（1）$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=2c$，$b^2=a^2-c^2=3c^2\Rightarrow$ 椭圆 $C:\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，

……………………………………………………1 分

又 $|PF|=x_p+\frac{p}{2}=2+\frac{p}{2}=3\Rightarrow p=2$，$c=\frac{p}{2}=1$ ……………3 分

$\Rightarrow$ 椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ……………………………………………4 分

抛物线 $E:y^2=4x$ ……………………………………………………5 分

（2）因为直线 HG 斜率不为 0，设为 $x=ty+1$，

设 $G(x_1, y_1)$，$H(x_2, y_2)$，联立 $\begin{cases} x=ty+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$

整理得 $(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$，……………………………6 分

所以 $\triangle=36t^2+36(3t^2+4)=144(t^2+1)>0$，

$y_1+y_2=\dfrac{-6t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3t^2+4}$， ……………………………7 分

所以 $S_{\Delta OHG}=\dfrac{1}{2}|OF||y_1-y_2|=\dfrac{6\sqrt{t^2+1}}{3t^2+4}$，

$\because \overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{OM}$，$\therefore S_{\Delta GHN}=2S_{\Delta OHG}$，

设四边形 $OHNG$ 的面积为 S，

则 $S=S_{\Delta OHG}+S_{\Delta GHN}=3S_{\Delta OHG}=\dfrac{18\sqrt{t^2+1}}{3t^2+4}=\dfrac{18}{\dfrac{3t^2+4}{\sqrt{t^2+1}}}=\dfrac{18}{3\sqrt{t^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}}$，

……………………………………………………9 分

令 $\sqrt{t^2+1}=m,(m\geq 1)$，再令 $y=3m+\dfrac{1}{m}$，

则 $y=3m+\frac{1}{m}$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递增，........................11 分

所以 $m=1$ 时，$y_{min}=4$，

此时 $t=0$，$3\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ 取得最小值 4，所以 $S_{max}=\frac{9}{2}$.

....12 分

22.解答（1）$g'(x)=\ln x-a+1$，则 $g(x)=0, x=e^{a-1}$

若 $0<x<e^{a-1}, g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减

若 $x>e^{a-1}, g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增........................1 分

$\therefore g(x)_{\min}=g(e^{a-1})=-e^{a-1}$ ....2 分

$f'(x)=(ax-1+a)e^x$，

若 $a\le 0$, 则 $f(x)$ 无最小值，$\therefore a>0$ ....3 分

若 $x<\frac{1-a}{a}, f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减

若 $x>\frac{1-a}{a}, f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(\frac{1-a}{a})=-ae^{\frac{1-a}{a}}$ ....4 分

$\therefore -ae^{\frac{1-a}{a}}=-e^{a-1}$

$\therefore a-\ln a-\dfrac{1}{a}=0$

令 $h(x)=x-\ln x-\dfrac{1}{x}\ (x>0)$

$h'(x)=1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

$=\dfrac{x^2-x+1}{x^2}>0$

$\therefore h(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增. ························· 5 分

又 $\because h(1)=0$

$\therefore a=1$ ·· 6 分

(2) $xf(x)-m=0\Rightarrow(x^2-x)e^x-m=0$

$\because m<0\therefore\ 0<x<1$

令 $u(x)=(x^2-x)e^x$，则 $u'(x)=(x^2+x-1)e^x$

$u(x)$ 在 $(0,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$ 上单调递减，$(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},1)$ 上单调递增，

···7 分

不妨令 $x_1<x_2$ 则 $0<x_1<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}<x_2<1$

①令 $H(x)=(x-1)e^x+1(x\ge 0)$

$H'(x)=xe^x\ge 0$，$H(x)$单调递增，$H(x)\ge H(0)=0$

$\therefore m=x_1f(x_1)=x_1(x_1-1)e^{x_1}>-x_1$

$\therefore x_1 > -m$ ……………………………………………………9 分

②令 $n(x)=e^x-x-1(x\geq 0)$

$n'(x)=e^x-1\geq 0$，$n(x)$ 单调递增，$n(x)\geq n(0)=0$

$\therefore x_2 f(x_2)=x_2(x_2-1)e^{x_2}<(x_2-1)x_2(x_2+1)<x_2-1$

$\therefore -x_1<x_1 f(x_1)=m=x_2 f(x_2)<x_2-1$

$\therefore x_2 > m+1$ ……………………………………………………11 分

$\therefore x_1 \cdot x_2 > -mx_2 > (-m)(m+1) = -m^2-m$

……………………………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。