2022~2023学年度第一学期期中学情检测

高 三 数 学

注 意 事 项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共4页，包含[单选题（1~8）多选题9~12，填空题（第13题～第16题，共80分）、解答题（第17～22题，共70分）。本次考试时间120分钟，满分150分、考试结束后，请将答题卡交回。
2. 答题前，请考生务必将自己的姓名、学校、班级、座位号、考试证号用0.5毫米的黑色签字笔写在答题卡上相应的位置，并将考试证号用2B铅笔正确填涂在答题卡的相应位置。
3. 答题时请用0.5毫米的黑色签字笔在答题卡指定区域作答。在试卷或草稿纸上作答一律无效。
4. 如有作图需要，可用2B铅笔作图，并请加黑加粗，描写清楚。

一、单选题：本大题共8小题，每题5分，共40分。在每小题提供的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知$A=\{4,5,6,7\}$，$B=\{6,7,8\}$，若$U=A\cup B$，则$C_U(A\cap B)=$

A. $\{6,7\}$　　B. $\{4,5,6,7,8\}$　　C. $\{4,5,8\}$　　D. $\varnothing$

2. 已知复数$z=a+2i(a\in\mathbf{R})$，且z^2是纯虚数，则$|z|=$

A. $2\sqrt{2}$　　B. 0　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

3. 已知角α满足$3\sin^2\alpha=8\cos\alpha$，则$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})=$

A. $\frac{7}{9}$　　B. $-\frac{7}{9}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4. 随着我县“三河六岸”工程主要设施的陆续建成，我县的城市生态功能得到恢复，城市景观风貌持续改善居民的幸福感不断提升，该工程中的某圆拱的跨度是96 m，拱高是16 m，则该圆拱所在圆的半径是

A. 64 m　　B. 80 m　　C. 100 m　　D. 40 m

5. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为0，且$a_3+a_{10}=0$，则集合$\{x\mid x=|a_n|,1\leqslant n\leqslant 15\}$的子集个数是

A. 2^{15}　　B. 9　　C. 1024　　D. 512

6. 在平面直角坐标系xOy中，已知$P(3,4)$，长度为2的线段AB的端点分别落在x轴和y轴上，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是

A．$[2,\sqrt{6}]$　　B．$[3,5]$　　C．$[4,6]$　　D．$[15,35]$

7．已知两个圆锥的母线长均为6，它们的侧面展开图恰好拼成一个半圆，若它们的侧面积之比是$1:2$，则它们的体积之和是

A．$\dfrac{\sqrt{35}+16\sqrt{2}}{3}\pi$　　B．$\dfrac{32\sqrt{5}+16\sqrt{2}}{3}\pi$　　C．$\dfrac{16\sqrt{70}}{9}\pi$　　D．$(\sqrt{35}+16\sqrt{2})\pi$

8．已知$a=\sqrt[e]{e}-1$，$b=\sin\dfrac{1}{e}$，$c=\dfrac{2e-1}{2e^2}$，则

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$　　C．$b<a<c$　　D．$a<c<b$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9．已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})+b(\omega>0)$的最小正周期$T$满足$\dfrac{\pi}{2}<T<\dfrac{3\pi}{2}$，且$P(-\dfrac{\pi}{8},1)$是$f(x)$的一个对称中心，则

A．$\omega=2$　　B．$f(x)$的值域是$[-2,2]$

C．$x=\dfrac{\pi}{8}$是$f(x)$的一条对称轴　　D．$f(x+\dfrac{\pi}{4})$是偶函数

10．在我国古代著名的数学专著《九章算术》里有一段叙述：今有良马与驽马发长安至齐，齐去长安一千一百二十五里，良马初日行一百零三里，日增十三里；驽马初日行九十七里，日减半里；良马先至齐，复还迎驽马，二马相逢．则

A．驽马第七日行九十四里　　B．第七日良马先至齐

C．第八日二马相逢　　D．二马相逢时良马行一千三百九十五里

11．已知实数x，y满足$x^2+y^2+xy=4$，则

A．$-2\leqslant y\leqslant 2$　　B．$-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\leqslant x+y\leqslant\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

C．$-4\leqslant x-y\leqslant 4$　　D．$\dfrac{8}{3}\leqslant x^2+y^2\leqslant 8$

12．设定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$和$g(x)$的导数分别为$f'(x)$和$g'(x)$，若$f(x+2)-g(1-x)=2$，$f'(x)=g'(x+1)$，且$g(x+1)$为奇函数，则

A．$g(1)=0$　　B．$g'(x)$的图象关于直线$x=2$对称

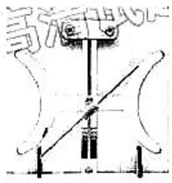
C. $\sum_{k=1}^{2021} g(k)=0$　　　　D. $f'(1)=0$

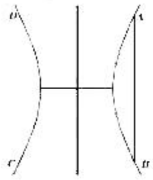
三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．不需写出解答过程，请把答案直接填写在答题卡相应位置上．

13. 在△ABC中，三边长是公差为2的等差数列，若△ABC是钝角三角形，则其最短边长可以为__▲__.（写出一个满足条件的值即可）

14. 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\leqslant 0,\\ f(x-1), x>1,\end{cases}$，则 $f(\log_2 12)=$__▲__.

15. 如图是一个"双曲狭缝"模型，直杆旋转时形成双曲面，双曲面的边缘为双曲线．已知该模型左、右两侧的两段曲线 AB 与 CD 中间最窄处间的距离为10 cm，点 A 与点 C，点 B 与点 D 均关于该双曲线的对称中心对称，且 $AB=30$ cm，$AD=20$ cm，则该双曲线的离心率是__▲__．





16. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$PA\perp$底面 $ABCD$．若四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为9，且其顶点均在球 O 上，则当球 O 的体积取得最小值时，$AP=$__▲__，此时球心 O 到平面 PBD 的距离是__▲__.

四、解答题：本大题共6小题，共70分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10分）

在△ABC中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a\sin B+b\cos A=0$，$\cos B+\sqrt{2}\cos C=\sqrt{5}$．

（1）求 $\tan B$；

（2）若边 AB 上的高为1，求△ABC的面积．

18.（12分）

已知 S_n 为正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$(n-1)\sqrt{S_n}-n\sqrt{S_{n-1}}=\frac{n^2-n}{2}$．

（1）证明 $\left\{\frac{\sqrt{S_n}}{n}\right\}$ 为等差数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

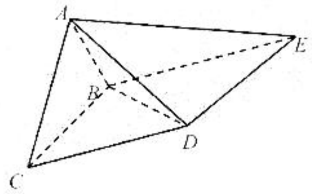
（2）若 $b_n=\tan\sqrt[3]{a_n}$，求数列 $\{b_nb_{n+1}\}$ 的前 n 项和 T_n．

19.（12 分）

如图所示，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$CD \parallel BE$，$BD \perp CD$，$AD = BE = \sqrt{2}CD = 2$，$DE = \sqrt{6}$．

（1）记平面 ACD 与平面 ABE 的交线为 l，证明：$l \parallel CD$；

（2）求二面角 $D-BE-A$ 的余弦值．



20.（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A，B 在抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上，抛物线 C 在 A、B 处的切线分别为 l_1，l_2，且 l_1，l_2 交于点 P．

（1）若点 $P(0,-2)$，求 AB 的长；

（2）从下面①②中选取一个作为条件，证明另外一个成立．

①直线 AB 过抛物线 C 的焦点；②点 P 在抛物线 C 的准线上．

21.（12 分）

已知 $f(x) = x^3 - ax^2\ (a \in \mathbf{R})$，其极小值为 -4．

（1）求 a 的值；

（2）若关于 x 的方程 $f(x) = t$ 在 $(0,3)$ 上有两个不相等的实数根 x_1，x_2，

求证：$3 < x_1 + x_2 < 4$．

22.（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的焦距为 2，过点 $A(1,\dfrac{3}{2})$．

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）若直线 l 交椭圆 C 于点 P，Q，直线 AP，AQ 分别交 y 轴于点 M、N，且 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \dfrac{9}{4}$，

求证：直线 l 过定点．

2022~2023学年度第一学期高三期中学情检测

数学参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. C　2. A　3. B　4. B　5. D　6. D　7. A　8. B

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. AC　10. AD　11. BCD　12. ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $(2,6)$内的任意值均可　14. $\frac{3}{4}$　15. 2　16. 3，$\frac{\sqrt{3}}{2}$

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a\sin B+b\cos A=0$，$\cos B+\sqrt{2}\cos C=\sqrt{5}$.

（1）求$\tan B$；

（2）若边AB上的高为1，求$\triangle ABC$的面积.

解：（1）因为$a\sin B+b\cos A=0$，所以$\frac{a}{-\cos A}=\frac{b}{\sin B}$，

在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{-\cos A}$，

所以$\sin A=-\cos A$，所以$\tan A=-1$，

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{3\pi}{4}$.　……………2分

在$\triangle ABC$中，$A+B+C=\pi$，

所以$\cos B+\sqrt{2}\cos(\pi-(A+B))=\cos B-\sqrt{2}\cos(A+B)$

$=\cos B-\sqrt{2}\cos A\cos B+\sqrt{2}\sin A\sin B=2\cos B+\sin B=\sqrt{5}$，

所以$(2\cos B+\sin B)^2=4\cos^2 B+4\sin B\cos B+\sin^2 B=5=5\cos^2 B+5\sin^2 B$，

所以$4\sin^2 B-4\sin B\cos B+\cos^2 B=(2\sin B-\cos B)^2=0$，

所以 $2\sin B=\cos B$，所以 $\tan B=\frac{1}{2}$． …………5 分

（2）因为 $A\in(0，\pi)$， $A=\frac{3\pi}{4}$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

因为边 AB 上的高 $b\sin A=1$，所以 $b=\frac{1}{\sin A}=\sqrt{2}$． …………7 分

在△ABC 中， $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin C=\sin(\pi-(A+B))=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}+(-\frac{\sqrt{2}}{2})\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

在△ABC 中，由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=1$． …………9 分

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$． …………10 分

另解：过点 C 向 AB 作垂线，垂足为 H．

在△ACH 中，$\angle CAH=\pi-\angle CAB=\frac{\pi}{4}$， $CH=1$， …………7 分

所以 $AH=1$， $AC=\sqrt{2}$．

在△BCH 中， $\tan B=\frac{1}{2}$， $CH=1$，

所以 $BH=1$，所以 $AB=BH-AH=1$， …………9 分

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$． …………10 分

18．（12 分）

已知 S_n 为正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$(n-1)\sqrt{S_n}-n\sqrt{S_{n-1}}=\frac{n^2-n}{2}$．

（1）证明 $\left\{\frac{\sqrt{S_n}}{n}\right\}$ 为等差数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=\tan\sqrt[3]{a_n}$，求数列 $\{b_nb_{n+1}\}$ 的前 n 项和 T_n．

解：（1） 因为 $(n-1)\sqrt{S_n}-n\sqrt{S_{n-1}}=\frac{n^2-n}{2}$，所以 $\frac{\sqrt{S_n}}{n}-\frac{\sqrt{S_{n-1}}}{n-1}=\frac{1}{2}$，

所以 $\left\{\frac{\sqrt{S_n}}{n}\right\}$ 为等差数列． …………2 分

因为 $\frac{\sqrt{S_1}}{1}=\frac{\sqrt{a_1}}{1}=1$，所以 $\frac{\sqrt{S_n}}{n}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}(n+1)$，所以 $\sqrt{S_n}=\frac{1}{2}(n^2+n)$，

所以 $S_n=(\frac{n^2+n}{2})^2$． …………4 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(\frac{n^2+n}{2})^2-(\frac{n^2-n}{2})^2$

$=(\frac{n^2+n}{2}+\frac{n^2-n}{2})(\frac{n^2+n}{2}-\frac{n^2-n}{2})=n^3$，

当 $n=1$ 时，$a_1=1^3=1$，所以 $a_n=n^3$． …………6 分

（2）因为 $b_n=\tan\sqrt[3]{a_n}=\tan n$，所以 $b_{n+1}b_n=\tan n\tan(n+1)$ …………8 分

因为 $\tan 1=\frac{\tan(n+1)-\tan n}{1+\tan n\tan(n+1)}$，

所以 $\tan n\tan(n+1)=\frac{\tan(n+1)-\tan n}{\tan 1}-1$． …………10 分

所以 $T_n=\frac{\tan 2-\tan 1}{\tan 1}-1+\frac{\tan 3-\tan 2}{\tan 1}-1+\cdots+\frac{\tan(n+1)-\tan n}{\tan 1}-1$

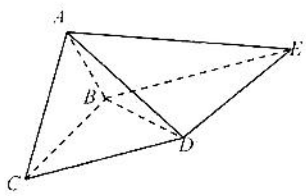
$=\frac{\tan(n+1)-\tan 1}{\tan 1}-n=\frac{\tan(n+1)}{\tan 1}-n-1$． …………12 分

19.（12 分）

如图所示，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$CD\parallel BE$，$BD\perp CD$，$AD=BE=\sqrt{2}CD=2$，$DE=\sqrt{6}$．

（1）记平面 ACD 与平面 ABE 的交线为 l，证明：$l\parallel CD$；

（2）求二面角 $D-BE-A$ 的余弦值．



解：（1）在四棱锥 $A-BCDE$ 中，$CD\parallel BE$，

又因为 $BE\subset$ 平面 ABE，$CD\not\subset$ 平面 ABE，

所以 $CD\parallel$ 平面 ABE． …………2 分

又因为平面 ACD 与平面 ABE 的交线为 l，

$CD\subset$ 平面 ACD，所以 $l\parallel CD$． …………4 分

（2）因为 $CD\parallel BE$，$BD\perp CD$，所以 $BD\perp BE$．

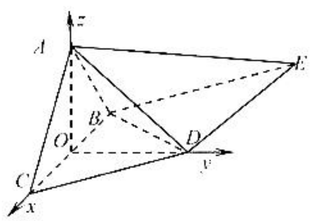
在直角 $\triangle BDE$ 中，因为 $DE=\sqrt{6}$，$BE=2$，所以 $BD=\sqrt{2}$．

在直角 $\triangle BCD$ 中，因为 $BD=\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{2}$，所以 $BC=2$．

取 BC 的中点 O，连接 OA，OD，

在等边 $\triangle ABC$ 中，$OA\perp BC$，$OA=\sqrt{3}$．

在等腰直角 $\triangle DBC$ 中，$OD\perp BC$，$OD=1$．



在$\triangle OAD$中，因为$OA=\sqrt{3}$，$OD=1$，$AD=2$，

所以$OD\perp OA$.

以$\{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\}$为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系$A—xyz$.

则$O(0,0,0)$，$C(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$B(-1,0,0)$，$A(0,0,\sqrt{3})$.

所以$\overrightarrow{AB}=(-1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(-1,1,0)$，

所以$\overrightarrow{BE}=\sqrt{2}\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$.

设$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$为平面$ABE$的法向量，

则$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BE}=0$，得$x_1+\sqrt{3}z_1=0$，$x_1=y_1$，

取$z_1=-1$，所以$\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$为平面$ABE$的一个法向量. …………8分

因为$\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$为平面DBE的法向量，

所以$\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{-1}{\sqrt{7}}=-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，

所以二面角$D-BE-A$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. …………12分

20.（12分）

在平面直角坐标系xOy中，已知点A，B在抛物线$C:x^2=4y$上，抛物线C在A，B处的切线分别为l_1，l_2，且l_1，l_2交于点P.

（1）若点$P(0,-2)$，求AB的长；

（2）从下面①②中选取一个作为条件，证明另外一个成立.

①直线AB过抛物线C的焦点；②点P在抛物线C的准线上.

解：（1）设$A(x_1,\dfrac{x_1^2}{4})$，$B(x_2,\dfrac{x_2^2}{4})$.

因为$C:x^2=4y$，所以$y=\dfrac{x^2}{4}$，所以$y'=\dfrac{x}{2}$，

所以抛物线C在A处的切线方程是$y-\dfrac{x_1^2}{4}=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)=\dfrac{x_1}{2}x-\dfrac{x_1^2}{2}$，

即$y=\dfrac{x_1}{2}x-\dfrac{x_1^2}{4}$. …………2分

同理可得抛物线 C 在 A 处的切线方程是 $y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}$．

由 $\begin{cases} y=\frac{x_1}{2}x-\frac{x_1^2}{4}, \\ y=\frac{x_2}{2}x-\frac{x_2^2}{4}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_P=\frac{x_1+x_2}{2}, \\ y_P=\frac{x_1x_2}{4}. \end{cases}$ …………4 分

因为 $P(0,-2)$，所以 $\begin{cases} x_P=\frac{x_1+x_2}{2}=0, \\ y_P=\frac{x_1x_2}{4}=-2, \end{cases}$

所以 $AB=|x_1-x_2|=4\sqrt{2}$． …………6 分

（2）①→②：

因为 $A(x_1,\frac{x_1^2}{4})$，$B(x_2,\frac{x_2^2}{4})$．

所以 $k_{AF}=\frac{\frac{x_1^2}{4}-1}{x_1}=\frac{x_1^2-4}{4x_1}$，$k_{BF}=\frac{x_2^2-4}{4x_2}$． …………8 分

因为直线 AB 过抛物线 C 的焦点，所以 $\frac{x_1^2-4}{4x_1}=\frac{x_2^2-4}{4x_2}$，

所以 $x_1x_2=-4$， …………10 分

所以 $y_P=\frac{x_1x_2}{4}=-1$，所以点 P 在抛物线 C 的准线上． …………12 分

②→①：

因为点 P 在抛物线 C 的准线上，所以 $y_P=\frac{x_1x_2}{4}=-1$，

所以 $x_1x_2=-4$． …………8 分

所以 $k_{AF}=\frac{\frac{x_1^2}{4}-1}{x_1}=\frac{x_1^2-4}{4x_1}$，

所以 $k_{BF}=\frac{x_2^2-4}{4x_2}=\frac{x_2^2+x_1x_2}{4x_2}=\frac{x_2+x_1}{4}=\frac{\frac{-4}{x_1}+x_1}{4}=\frac{x_1^2-4}{4x_1}=k_{AF}$， …………10 分

又因为 F 是公共点，所以 A，B，F 三点共线，

所以直线 AB 过抛物线 C 的焦点． …………12 分

21.（12 分）

已知 $f(x)=x^3-ax^2\ (a\in\mathbf{R})$，其极小值为 -4．

（1）求 a 的值；

（2）若关于 x 的方程 $f(x)=t$ 在 $(0,3)$ 上有两个不相等的实数根 x_1，x_2，

求证：$3<x_1+x_2<4$．

【解】（1）因为 $f(x)=x^3-ax^2$，所以 $f'(x)=3x^2-2ax$．

当 $a=0$ 时，$f'(x)=3x^2\geqslant 0$，

所以 $f(x)$ 单调递增，没有极值，舍去．　　…………2 分

当 $a<0$ 时，在区间 $(-\infty,\frac{2a}{3})$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

在区间 $(\frac{2a}{3},0)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在区间 $(0,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以当 $x=0$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0$，舍去．　　…………4 分

当 $a>0$ 时，在区间 $(-\infty,0)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

在区间 $(0,\frac{2a}{3})$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在区间 $(\frac{2a}{3},+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以当 $x=\frac{2a}{3}$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f(\frac{2a}{3})=-\frac{4}{27}a^3=-4$．

所以 $a=3$．　　…………6 分

（2）由（1）知，在区间 $(-\infty,0)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

在区间 $(0,2)$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

在区间 $(2,+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以不妨设 $0<x_1<2<x_2<3$．

下面先证 $x_1+x_2<4$．

即证 $x_1<4-x_2$，因为 $0<x_1<2<x_2<3$，所以 $1<4-x_2<2$，

又因为区间 $(0,2)$ 上，$f(x)$ 单调递减，

只要证 $f(x_1)>f(4-x_2)$，又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，

只要证 $f(x_2)>f(4-x_2)$，只要证 $f(x_2)-f(4-x_2)>0$．

设 $g(x)=f(x)-f(4-x)(0<x<2)$，

则 $g'(x)=f'(x)+f'(4-x)=3x(x-2)+3(4-x)((4-x)-2)=6(x-2)^2>0$，

所以 $g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)>g(0)=0$，所以 $f(x_2)-f(4-x_2)>0$． …………9 分

下面先证 $3<x_1+x_2$．

设 $h(x)=2x^2-6x$，因为 $f(x)-h(x)=x^3-5x^2+6x=x(x-2)(x-3)$，

在区间 $(0,2)$ 上，$f(x)>h(x)$；在区间 $(2,3)$ 上，$f(x)<h(x)$．

设 $x_3\in(0,\frac{3}{2})$，$f(x_1)=h(x_3)=t$，因为 $f(x_1)>h(x_1)$，

所以 $h(x_3)>h(x_1)$，所以 $x_3<x_1$．

设 $x_4\in(2,3)$，$f(x_2)=h(x_4)=t$，因为 $f(x_2)<h(x_2)$，

所以 $h(x_2)>h(x_4)$，所以 $x_4<x_2$．

因为 $h(x_3)=h(x_4)=t$，所以 $x_3+x_4=3$，

所以 $3=x_3+x_4<x_1+x_2$． …………12 分

22.（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 2，点 $A(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上．直线 l 交椭圆 C 于点 P，Q，直线 AP，AQ 分别交 y 轴于点 M，N．

（1）若点 P，Q 分别为椭圆的左右顶点，求 $\triangle AMN$ 的面积；

（2）若 $\overline{OM}\cdot\overline{ON}=\frac{9}{4}$，求证：直线 l 过定点．

【解】（1）方法一：设椭圆 C 的焦距为 $2c$，则 $c=1$．

不妨设 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，

所以 $AF_2=\sqrt{0^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{3}{2}$，$AF_1=\sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{5}{2}$，

所以 $AF_1+AF_2=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4=2a$，解得 $a=2$．

因为 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，所以椭圆 C 的标准方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． …………2 分

方法二：设椭圆 C 的焦距为 $2c$，则 $c=1$．

由$\begin{cases} a^2=c^2+b^2, \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1, \\ c=1, \end{cases}$解得$a=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

所以椭圆C的标准方程$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． …………2 分

不妨设$P(-2,0)$，$Q(2,0)$，

则直线AP的方程为$y=\dfrac{1}{2}(x+2)$，直线AQ的方程为$y=-\dfrac{3}{2}(x-2)$．

令$x=0$，得$y_M=1$，$y_N=3$，所以$MN=3-1=2$．

所以$\triangle AMN$的面积$S=\dfrac{1}{2}\times1\times2=1$． …………4 分

（2）显然直线AP，AQ斜率都存在．

设直线AP的方程为$y=k_1(x-1)+\dfrac{3}{2}$．

令$x=0$，得$y_M=-k_1+\dfrac{3}{2}$．

设直线AQ的方程为$y=k_2(x-1)+\dfrac{3}{2}$，同理可得$y_N=-k_2+\dfrac{3}{2}$．

因为$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{9}{4}$，所以$(-k_1+\dfrac{3}{2})(-k_2+\dfrac{3}{2})=k_1k_2-\dfrac{3}{2}(k_1+k_2)+\dfrac{9}{4}=\dfrac{9}{4}$，

所以$k_1k_2=\dfrac{3}{2}(k_1+k_2)$． …………8 分

设直线l的方程为$m(x-1)+n(y-\dfrac{3}{2})=1$．

由$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \\ m(x-1)+n(y-\dfrac{3}{2})=1, \end{cases}$

得$(4+12n)(\dfrac{y-\frac{3}{2}}{x-1})^2+(12m+6n)(\dfrac{y-\frac{3}{2}}{x-1})+6m+3=0$，

所以$k_1+k_2=-\dfrac{12m+6n}{4+12n}$，$k_1k_2=\dfrac{6m+3}{4+12n}$，

所以$\dfrac{3}{2}\times(-\dfrac{12m+6n}{4+12n})=\dfrac{6m+3}{4+12n}$，所以$-8m-3n=1$，

所以$\begin{cases} x-1=-8, \\ y-\dfrac{3}{2}=-3, \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=-7, \\ y=-\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

所以直线l过点$H(-7,-\dfrac{3}{2})$． …………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。