

绝密★启用前

# 榆林市 2022~2023 年度第三次模拟考试

## 数学试题(理科)

考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

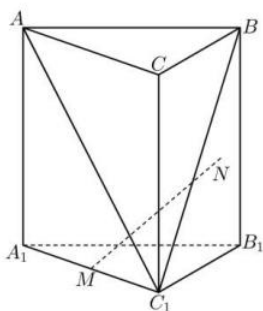
### 第 I 卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z = \sqrt{2}i$ , 则( )  
(A)  $z^2 = 2$                       (B)  $z^2 = -4$                       (C)  $z^4 = 2$                       (D)  $z^4 = 4$
2. 已知集合  $A = \{x | 0 < x < 16\}$ ,  $B = \{y | -4 < 4y < 16\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )  
(A)  $(-1, 16)$                       (B)  $(0, 4)$                       (C)  $(-1, 4)$                       (D)  $(-4, 16)$
3. 一个等差数列的前 3 项之和为 12, 第 4 项为 0, 则第 6 项为( )  
(A)  $-2$                       (B)  $-4$                       (C)  $1$                       (D)  $2$
4. 已知两个非零向量  $\mathbf{a} = (1, x)$ ,  $\mathbf{b} = (x^2, 4x)$ , 则 “ $|x| = 2$ ” 是 “ $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ ” 的( )  
(A) 充分不必要条件                      (B) 必要不充分条件  
(C) 充要条件                      (D) 既不充分也不必要条件
5. 实轴在  $y$  轴上的双曲线的离心率为  $\sqrt{10}$ , 则该双曲线渐近线的倾斜角的正弦值为( )  
(A)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$                       (B)  $\frac{1}{10}$                       (C)  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$                       (D)  $\frac{3}{10}$
6. 某省将从 5 个 A 类科技项目、6 个 B 类科技项目、4 个 C 类科技项目中选 4 个项目重点发展, 其中这 3 类项目都要有, 且 A 类项目中有 1 个项目已经被选定。则满足条件的不同选法共有( )  
(A) 96                      (B) 144 种                      (C) 192 种                      (D) 206 种

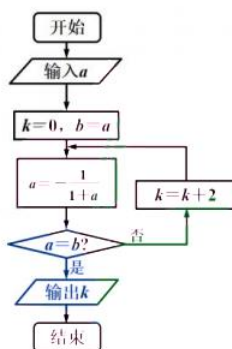
7. 如图, 正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的底面边长是 2, 侧棱长是  $2\sqrt{5}$ ,  $M$  为  $A_1C_1$  的中点,  $N$  是侧面  $BCC_1B_1$  上一点, 且  $MN \parallel$  平面  $ABC_1$ , 则线段  $MN$  的最大值为( )

- (A)  $2\sqrt{2}$       (B)  $2\sqrt{3}$       (C)  $\sqrt{10}$       (D) 3



8. 执行如图所示的程序框图, 若输入的  $a=2$ , 则输出的  $k=($  )

- (A) 2      (B) 4      (C) 6      (D) 8



9. 定义在  $(0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  的导函数都存在,  $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) < 1$ , 且  $f(1)=2$ ,  $g(1)=1$ , 则  $f(x)g(x) < x+1$  的解集为( )

- (A)  $(1, 2)$       (B)  $(2, +\infty)$       (C)  $(0, 1)$       (D)  $(1, +\infty)$

10. 现有 17 匹善于奔驰的马, 它们从同一个起点出发, 测试它们一日可行的路程. 已知第  $i(i=1, 2, \dots, 16)$  匹马的日行路程是第  $i+1$  匹马日行路程的 1.05 倍, 且第 16 匹马的日行路程为 315 里, 则这 17 匹马的日行路程之和约为(取  $1.05^{17}=2.292$ )( )

- (A) 7750 里      (B) 7752 里      (C) 7754 里      (D) 7756 里

11. 已知  $a = \log_3 4.3.5 + \log_3 5.3.4$ ,  $b = \log_3 5.3.6 + \log_3 6.3.5$ ,  $c = \log_\pi 3.7$ , 则( )

- (A)  $a > b > c$       (B)  $b > a > c$       (C)  $a > c > b$       (D)  $b > c > a$

12. 已知三棱锥  $A-BCD$  中,  $AB \perp BC$ ,  $BC \perp CD$ ,  $CD=2AB=2BC=4$ , 二面角  $A-BC-D$  为  $60^\circ$ , 则三棱锥  $A-BCD$  外接球的表面积为( )

- (A)  $16\pi$       (B)  $24\pi$       (C)  $18\pi$       (D)  $20\pi$

## 第II卷

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知奇函数  $f(x) = x^3 + (a-5)x^2 + ax (x \in \mathbf{R})$ ，则  $f(1) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

14. 若不等式  $ax^2 - 6x + 3 > 0$  对  $x \in \mathbf{R}$  恒成立，则  $a$  的取值范围是  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ ， $a + \frac{9}{a-1}$  的最小值为  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ . (本题第一空3分，第二空2分)

15. 已知函数  $f(x) = \tan 2x$  与  $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$  的图象在区间  $[-\pi, \pi]$  上的交点个数为  $m$ ，直线  $x + y = 2$  与  $f(x)$  的图象在区间  $[0, \pi]$  上的交点的个数为  $n$ ，则  $m + n = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

16. 已知直线  $y = x - m$  与椭圆  $C: x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$  于  $A, B$  两点，则线段  $AB$  的中点  $P$  的轨迹长度为  $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ .

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第17题~第21题为必考题，每个考题考生必须作答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

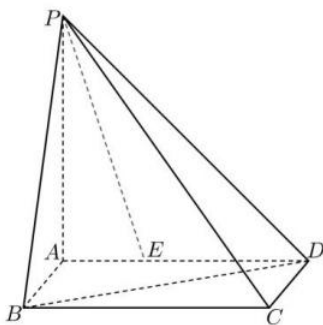
(一)必考题：共60分.

17. (12分)

如图，底面为矩形  $ABCD$  的四棱锥  $P-ABCD$  中， $PA \perp$  底面  $ABCD$ .

(1)证明：平面  $PAD \perp$  平面  $PCD$ .

(2)若  $PA = AD = 3$ ， $AB = 1$ ， $E$  在棱  $AD$  上，若  $AD = 3AE$ ，求  $PE$  与平面  $PBD$  所成角的正弦值.



18. (12分)

已知  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边， $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4$ ，且  $a \sin B = 8 \sin A$ .

(1)求  $A$ ;

(2)求  $\sin A \sin B \sin C$  的取值范围.



19. (12分)

已知1个不透明的袋子中装有6个白球和4个黄球(这些球除颜色外无其他差异).甲从袋中摸出1球,若摸出的是白球,则除将摸出的白球放回袋子中外,再将袋子中的1个黄球拿出,放入1个白球;若摸出的是黄球,则除将摸出的黄球放回袋子中外,再将袋子中的1个白球拿出,放入1个黄球.再充分搅拌均匀后,进行第二次摸球,依此类推,直到袋中全部是同一种颜色的球,已知甲进行了4次摸球,记袋子中白球的个数为 $X$ .

- (1)求袋子中球的颜色只有一种的概率;
- (2)求 $X$ 的分布列和期望.

20. (12分)

已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F$ , $A$ 是 $C$ 上的动点,点 $P(1, 1)$ 不在 $C$ 上,且 $|AF|+|AP|$ 的最小值为2.

- (1)求 $C$ 的方程;
- (2)若直线 $AP$ 与 $C$ 交于另一点 $B$ ,与直线 $l$ 交于点 $Q$ ,设 $\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{PA}$ , $\overrightarrow{QB}=\mu\overrightarrow{PB}$ ,且 $\lambda+\mu=4$ ,求直线 $l$ 的方程.

21. (2023年榆林市三模)(12分)

已知函数 $f(x)=x\ln x$ .

- (1)若直线 $y=2x+m$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切,求 $m$ 的值;
- (2)证明: $-\frac{1}{e}\leq f(x)<\frac{e^x}{2x}$ (参考数据: $e^4>54$ ).

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答,并用2B铅笔将所选题号涂黑,多涂、错涂、漏涂均不给分,如果多做,则按所做的第一题计分.

22. [选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 $xOy$ 中,曲线 $M$ 的方程为 $y=\sqrt{-x^2+4x}$ ,曲线 $N$ 的方程为 $xy=9$ .以坐标原点 $O$ 为极点, $x$ 轴的正半轴为极轴,建立极坐标系.

- (1)求曲线 $C_1$ 的极坐标方程和曲线 $C_2$ 的直角坐标方程;
- (2)若射线 $l: \theta=\theta_0(\rho\geq 0, 0<\theta_0<\frac{\pi}{2})$ 与曲线 $M$ 交于点 $A$ (均异于极点),与曲线 $N$ 交于点 $B$ ,且 $|OA|\cdot|OB|=12$ ,求 $\theta_0$ .

23. [选修4-5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x)=|x-a-1|+|x-2a|$ .

- (1)证明:存在 $a\in(0, +\infty)$ ,使得 $f(x)\geq 1$ 恒成立;
- (2)当 $x\in[2a, 4]$ 时, $f(x)\leq x+a$ ,求 $a$ 的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

