2022 - 2023学年度第一学期教学质量检查

# 高三数学 参考答案

## 一、单项选择题

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | A | C | D | A | C | C | B | B |

## 二、多项选择题（全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分）

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | AC | BD | BC | ABC |

## 三、填空题

13. 1　　　　14. $\frac{1}{2}$　　　　15. $2\sqrt{3}$　　　　16. $(\sqrt{6}-2)$

## 四、解答题

17. 解：（1）当 $n=1$ 时，$3S_1=2a_1+1$，即 $a_1=1$，……1分

当 $n\geq 2$ 时，$\begin{cases}3S_n=2a_n+1\\3S_{n-1}=2a_{n-1}+1\end{cases}$，

相减得 $3a_n=2a_n+1-(2a_{n-1}+1)=2a_n-2a_{n-1}$，

整理得 $a_n=-2a_{n-1}$，……3分

因为 $a_1=1\neq 0$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=-2$，

所以 $\{a_n\}$ 是首项为1，公比为-2的等比数列，……4分

所以 $a_n=(-2)^{n-1}$．……5分

（2）因为 $|a_n|=2^{n-1}$，所以 $|a_n|=2^{n-1}$ 单调递增，

当 $n=1$ 时，$M_1=m_1=a_1=1$，所以 $b_1=\frac{M_1+m_1}{2}=1$，……6分

当 $n$ 为奇数且 $n>1$ 时，$0<a_1<-a_2<a_3<-a_4<\cdots<-a_{n-1}<a_n$

即 $a_n>a_{n-2}>\cdots>a_3>a_1>0>a_2>a_4>\cdots>a_{n-1}$，

所以 $M_n=a_n$，$m_n=a_{n-1}$，

当 $n$ 为偶数时，$0<a_1<-a_2<a_3<-a_4<\cdots<a_{n-1}<-a_n$

即 $a_{n-1}>a_{n-3}>\cdots>a_3>a_1>0>a_2>a_4>\cdots>a_n$，

所以 $M_n=a_{n-1}$，$m_n=a_n$，

所以 $b_n=\begin{cases}1, & n=1\\ \frac{a_n+a_{n-1}}{2}, & n\geq 2\end{cases}$，……7分

所以 $T_n=1+\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_2+a_3}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}+a_n}{2}$ ……8分

$=1+\frac{1}{2}[(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})]$

$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)}+\frac{(-2)(1-(-2)^{10})}{1-(-2)}\right)$ ……………………………………………………9分

$=1+\frac{1}{6}(1+2^{10}-2-2^{11})=1+\frac{1}{6}(-1-2^{10})=\frac{5-2^{10}}{6}$. ……………………………………10分

说明：列举求解给满分.

18.解：（1）**解法一**：因为 $M$ 是 $BC$ 的中点，所以 $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle AMC}$，……………………………2分

所以 $\frac{1}{2}AB\times AM\times\sin\angle BAM=\frac{1}{2}AC\times AM\times\sin\angle MAC$，……………………………………………4分

即 $\frac{1}{2}\times4\times AM\times\sin\angle BAM=\frac{1}{2}\times2\times AM\times\sin\angle MAC$，

所以 $\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle MAC}=\frac{1}{2}$.……………………………………………………………………………6分

**解法二**：在 $\triangle ABM$ 中，由正弦定理得 $\frac{BM}{\sin\angle BAM}=\frac{AB}{\sin\angle BMA}$，即 $\sin\angle BAM=\frac{BM}{4}\sin\angle BMA$，

……………………………………………………………………………………………………………2分

在 $\triangle ACM$ 中，由正弦定理得 $\frac{CM}{\sin\angle MAC}=\frac{AC}{\sin\angle AMC}$，即 $\sin\angle MAC=\frac{CM}{2}\sin\angle AMC$，……3分

因为 $M$ 是 $BC$ 的中点，所以 $BM=CM$，…………………………………………………………4分

因为 $\angle BMA+\angle CMA=\pi$，所以 $\sin\angle BMA=\sin\angle CMA$，……………………………………5分

所以 $\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle MAC}=\frac{1}{2}$.……………………………………………………………………………6分

（2）在 $\triangle MAC$ 中，因为 $\cos\angle MAC=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\angle MAC$ 是锐角，

所以 $\sin\angle MAC=\sqrt{1-\cos^2\angle MAC}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，……………………………………7分

由（1）得 $\sin\angle BAM=\frac{1}{2}\sin\angle MAC=\frac{\sqrt{10}}{8}$，……………………………………………………8分

在 $\triangle ABM$ 中，因为 $\angle BAM$ 是锐角，所以 $\cos\angle BAM=\sqrt{1-\sin^2\angle BAM}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$，

……………………………………………………………………………………………………………9分

所以 $\sin\angle BAC=\sin(\angle MAB+\angle MAC)=\sin\angle MAB\cos\angle MAC+\cos\angle MAB\sin\angle MAC$ ……10分

$=\frac{\sqrt{10}}{8}\times\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{3\sqrt{6}}{8}\times\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，…………………………………………………………11分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$.……………………………12分

19.解：（1）因为 $AB$ 为直径，$C$ 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点,所以 $AC\perp BC$，…………………………1分

又因为 $AC\perp PC$，$PC\cap BC=C$，$BC\subset$ 平面 $PBC$，$PC\subset$ 平面 $PBC$，

所以 $AC\perp$ 平面 $PBC$，……………………………………………………………………………2分

因为 $PB \subset$ 平面 $PAC$，

所以 $AC \perp PB$. ……………………………………………………………………………3分

因为 $AB$ 为直径，$P$ 为半球面上一点，所以 $PB \perp PA$，……………………………………4分

又因为 $PA \cap AC = A$，$AC \subset$ 平面 $PAC$，$PA \subset$ 平面 $PAC$，

所以 $PB \perp$ 平面 $PAC$，…………………………………………………………………………5分

因为 $PC \subset$ 平面 $PAC$，

所以 $PB \perp PC$. …………………………………………………………………………………6分

（2）在 $Rt\triangle ABC$ 中，由 $AC = AM = 2$，得 $BC = 2\sqrt{3}$，

在 $Rt\triangle PBC$ 中，由 $PB = \sqrt{6}$，$BC = 2\sqrt{3}$，得 $PC = \sqrt{6}$，

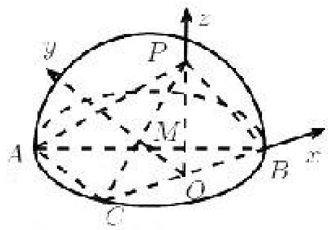
取 $BC$ 中点 $O$，连接 $PO$，$MO$，

因为 $PB = PC$，所以 $PO \perp BC$，

因为 $MO // AC$，且 $AC \perp$ 平面 $PBC$，所以 $MO \perp$ 平面 $PBC$，

因为 $PO \subset$ 平面 $PBC$，所以 $MO \perp PO$，

所以 $OB$，$OM$，$OP$ 两两相互垂直，……………………………………………………8分




如图，分别以 $OB$，$OM$，$OP$ 为 $x, y, z$ 轴建立空间直角坐标系，则

$A(-\sqrt{3}, 2, 0)$，$B(\sqrt{3}, 0, 0)$，$C(-\sqrt{3}, 0, 0)$，$P(0, 0, \sqrt{3})$，…………………………9分

设平面 $PAB$ 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$，

因为 $\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{3}, -2, 0)$，$\overrightarrow{PB} = (\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3})$，

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{PB} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 2\sqrt{3}x - 2y = 0 \\ \sqrt{3}x - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ z = x \end{cases}$，取 $x = 1$，得 $\vec{m} = (1, \sqrt{3}, 1)$，…10分

又因为 $\overrightarrow{CP} = (\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$，

所以 $\cos < \vec{m}, \overrightarrow{CP} > = \dfrac{\vec{m} \cdot \overrightarrow{CP}}{|\vec{m}||\overrightarrow{CP}|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} \times \sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$，……………………………11分

设直线 $PC$ 与平面 $PAB$ 所成角为 $\theta$，所以 $\sin\theta = |\cos < \vec{m}, \overrightarrow{CP} >| = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ………………12分

20.解：（1）因为发射 $B$ 型号炮弹3发至少命中一发的对立事件是一发都未命中，且每发炮弹击中与否相互独立，……………………………………………………………………1分

所以发射 $B$ 型号炮弹3发至少命中一发的概率为 $1-(1-q)^3$，…………………………2分

所以 $1-(1-q)^3 \geq 0.936$，

解得 $q \geq 0.6$，……………………………………………………………………………3分

所以 $0.6\le q<1$ ………………………………………………………………………………4分

（2）选用 $B$ 型号炮弹使得目标飞行物坠毁的概率更大，理由如下：………………………5分

记事件 $M$ = "发射 型号炮弹目标飞行物坠毁"，$A_i$ "发射 型号炮弹命中 发" $(i=0,1,2,3)$，

所以 $P(M)=P(A_1)P(M|A_1)+P(A_2)P(M|A_2)+P(A_3)P(M|A_3)$

$=C_3^1p(1-p)^2\times0.6+C_3^2p^2(1-p)\times1+C_3^3p^3\times1$

$=-0.2p^3-0.6p^2+1.8p$，………………………………………………………………7分

同理记 $N$ = "发射 型号炮弹目标飞行物坠毁"，$B_j$ "发射 型号炮弹命中 发" $(j=0,1,2,3)$，

所以 $P(N)=P(B_1)P(M|B_1)+P(B_2)P(M|B_2)+P(B_3)P(M|B_3)$

$=C_3^1q(1-q)^2\times0.4+C_3^2q^2(1-q)\times0.8+C_3^3q^3\times1$

$=-0.2q^3+1.2q$ ………………………………………………………………………9分

$=-0.2(1-p)^3+1.2(1-p)=0.2p^3-0.6p^2-0.6p+1$，

作差比较得 $P(N)-P(M)=0.4p^3-2.4p+1$，………………………………………10分

记 $f(p)=0.4p^3-2.4p+1$，则 $f'(p)=1.2p^2-2.4=1.2(p^2-2)<0$ 恒成立，

所以 $f(p)$ 在 $(0,0.4]$ 上单调递减，

因为 $f(0.4)=0.4^4-2.4\times0.4+1=0.4^4-0.96+1>0$，………………………………11分

所以当 $p\in(0,0.4]$ 时，$P(N)-P(M)>0$，即 $P(N)>P(M)$，

所以选用 $B$ 型号炮弹使得目标飞行物坠毁的概率更大.……………………………12分

21.解：（1）$2a=\sqrt{4^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}-\sqrt{0^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=2\sqrt{3}$，……………………………2分

又因为 $c=2$，所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=1$，……………………………………………3分

双曲线 $E$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ ………………………………………………4分

（2）由题意可得直线的斜率存在且斜率不为0，

设直线的方程为 $y=kx+m(k\ne0)$，

联立得 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{3}-y^2=1\end{cases}$，消去 $y$ 得 $(1-3k^2)x^2-6kmx-3m^2-3=0$，……………5分

因为直线与双曲线 $E$ 相切，

所以 $1-3k^2\ne0$ 且 $\Delta=36k^2m^2-4(1-3k^2)\times(-3m^2-3)=0$，

化简得 $m^2=3k^2-1\left(k^2\ne\frac{1}{3}\right)$，………………………………………………6分

又因为直线 $F_2Q$ 与 垂直，且 $F_2(2,0)$，所以直线 $F_2Q$ 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-2)$，

联立 $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{k}(x-2) \\ y=kx+m \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=\dfrac{2-km}{1+k^2} \\ y=\dfrac{2k+m}{1+k^2} \end{cases}$，

即点 $Q$ 的坐标为 $Q\left(\dfrac{2-km}{1+k^2},\dfrac{2k+m}{1+k^2}\right)$，…………………………………………8分

同理可得点 $P$ 的坐标 $P\left(\dfrac{2-km}{1+k^2},\dfrac{-2k+m}{1+k^2}\right)$，…………………………………9分

所以 $|OQ|^2=\dfrac{(2-km)^2+(2k+m)^2}{(1+k^2)^2}=\dfrac{m^2+4}{1+k^2}=\dfrac{3k^2+3}{1+k^2}=3$，

所以 $|OQ|=\sqrt{3}$，同理 $|OP|=\sqrt{3}$，…………………………………………10分

所以 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}|OP|\times|OQ|\sin\angle POQ\le\dfrac{1}{2}|OP|\times|OQ|=\dfrac{3}{2}$，………………………11分

当 $\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}=\dfrac{k^2m^2-4}{(1+k^2)^2}+\dfrac{m^2-4k^2}{(1+k^2)^2}=\dfrac{m^2-4}{1+k^2}=0$，即 $m^2=4,k^2=\dfrac{5}{3}$ 时等号成立，

所以 $\triangle OPQ$ 面积的最大值为 $\dfrac{3}{2}$.…………………………………………12分

22.解：（1）求导得 $f'(x)=x(e^x-4a)$，…………………………………………1分

①当 $a\le 0$ 时，

当 $f'(x)<0$ 时，$x\in(-\infty,0)$，当 $f'(x)>0$ 时，$x\in(0,+\infty)$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；……………………2分

②当 $0<a<\dfrac{1}{4}$ 时，

当 $f'(x)<0$ 时，$x\in(\ln(4a),0)$，当 $f'(x)>0$ 时，$x\in(-\infty,\ln(4a))$ 或 $x\in(0,+\infty)$，

所以 $f(x)$ 在 $(\ln(4a),0)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\ln(4a))$，$(0,+\infty)$ 上单调递增；………3分

③当 $a=\dfrac{1}{4}$ 时，

$f'(x)\ge 0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增；…………………………………………4分

④当 $a>\dfrac{1}{4}$ 时，

当 $f'(x)<0$ 时，$x\in(0,\ln(4a))$，当 $f'(x)>0$ 时，$x\in(-\infty,0)$ 或 $x\in(\ln(4a),+\infty)$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\ln(4a))$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)$，$(\ln(4a),+\infty)$ 上单调递增.…………5分

综上所述：$a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<a<\dfrac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(\ln(4a),0)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\ln(4a))$，$(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a=\dfrac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $a>\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\ln(4a))$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)$，$(\ln(4a),+\infty)$ 上单调递增.

（2）原问题等价于不等式 $h(x)\geq 0$ 恒成立.

设 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x+\cos x-4ax-2$，……………………………………………6分

求导得 $h'(x)=e^x-\sin x-4a$，

求二阶导得 $h''(x)=e^x-\cos x\geq 1-\cos x\geq 0$ 恒成立.

所以 $h'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………7分

①当 $a\leq\frac{1}{4}$ 时，

$h'(x)\geq h'(0)=1-4a\geq 0$ 恒成立.

所以 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $h(x)\geq h(0)=0$ 恒成立.

所以 $a\leq\frac{1}{4}$；……………………………………………9分

②当 $a>\frac{1}{4}$ 时，

$h'(0)=1-4a<0$，$h'(\ln(4a+2))=2-\sin(\ln(4a+2))>0$，

所以存在 $x_0\in(0,\ln(4a+2))$，使得 $h'(x_0)=0$，且 $x\in(0,x_0)$，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)\leq h(0)=0$，不合题意.

所以 $a$ 无解；……………………………………………11分

综上所述 $a\leq\frac{1}{4}$. ……………………………………………12分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线