商洛市 2022～2023 学年度第二学期教学质量抽样监测
高二年级数学试卷参考答案(理科)

1. C　因为 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{x\mid x>\frac{5}{2}\}$，所以 $A\cap B=\{3,4,5\}$.

2. A　因为 $z=\frac{|1-\mathrm{i}|}{1-\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$，所以 z 的虚部为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. B　因为 $f(x)$是奇函数，所以 $f(-2)=-f(2)=-(2^3+2^2+2)=-14$.

4. D　设该等比数列为$\{a_n\}$，则 $a_1+a_2=a_1-3a_1=-2a_1=10$，$a_1=-5$，所以 $a_3=(-3)^2a_1=-45$.

5. B　由 $2\pi x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{5}{12}+\frac{k}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

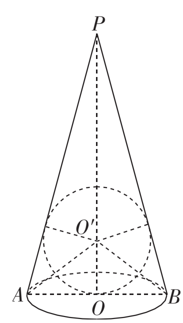
6. D　由三视图可知，该几何体是四分之一个圆柱(高为 2，底面半径为 3)，其体积 $V=\frac{1}{4}\pi\times3^2\times2=\frac{9\pi}{2}$.

7. B　因为 $N=\mathrm{C}_5^1\mathrm{A}_5^5=25\mathrm{A}_4^4$，$M=\mathrm{A}_5^5+\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_4^1\mathrm{A}_4^4=13\mathrm{A}_4^4$，所以$\frac{M}{N}=\frac{13}{25}$.

8. C　$E(X)=2\times0.4+7\times0.6=5$，$D(X)=(2-5)^2\times0.4+(7-5)^2\times0.6=6$.

9. D　因为 $f(x)=\frac{1}{2}f'(1)x^2+\ln x+\frac{f(1)}{3x}$，所以 $f'(x)=f'(1)x+\frac{1}{x}-\frac{f(1)}{3x^2}$，则 $f'(1)=f'(1)+1-\frac{f(1)}{3}$，解得 $f(1)=3$. 由 $f(1)=\frac{1}{2}f'(1)+\frac{f(1)}{3}$，解得 $f'(1)=4$，则 $f'(x)=4x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，$f'(2)=\frac{33}{4}$.

10. A　由题意得该圆锥的母线长为 4，设圆锥的底面半径为 R，高为 h，由 $2\pi R=4\times\frac{\pi}{2}$，得 $R=1$，则 $h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{15}$，所以该圆锥的表面积为 $\pi R^2+\pi Rl=5\pi$. 如图，圆锥 PO 内切球的半径等于$\triangle PAB$ 内切圆的半径，设$\triangle PAB$ 的内切圆为圆O'，其半径为 r，由 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAO'}+S_{\triangle PBO'}+S_{\triangle ABO'}$，得$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{15}=\frac{1}{2}\times4r+\frac{1}{2}\times4r+\frac{1}{2}\times2r$，得 $r=\frac{\sqrt{15}}{5}$，故能制作的零件表面积的最大值为 $4\pi r^2=\frac{12\pi}{5}$.



11. A　因为 $f(x)=\log_{0.2}(x^2-x+1)$，所以 $f(x)=f(1-x)$，且 $f(x)$在$(\frac{1}{2},+\infty)$上单调递减.

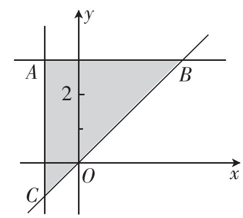
因为 $a=\log_2 3>1$，$\frac{1}{2}<b=\log_3 2<1$，$b+c=\log_3 2\sqrt{2}<\log_3 3=1$，

所以 $f(a)<f(c)<f(b)$.

12. D　由题可知 $F(3,0)$，设直线 l 的方程为 $x=ty+3$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立方程组 $\begin{cases}x=ty+3,\\ y^2=12x,\end{cases}$ 整理得 $y^2-12ty-36=0$，则 $y_1+y_2=12t$，$y_1y_2=-36$，$|MF|=x_1+3=\frac{y_1^2}{12}+3$，$|NF|=x_2+3=\frac{y_2^2}{12}+3$，所以 $4|MF|+|NF|=\frac{y_1^2}{3}+\frac{y_2^2}{12}+15\geqslant 2\sqrt{\frac{y_1^2y_2^2}{36}}+15=27$，当且仅当 $y_2=-2y_1$ 时，等号成立.

13. 1　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $x(x+2)-3=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-3$，所以正数 $x=1$.

14. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　因为 E 的一条渐近线的倾斜角为 $30°$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 E 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



15. 8　作出不等式组 $\begin{cases}y\leqslant 3,\\ y\geqslant x,\\ x\geqslant -1\end{cases}$ 表示的可行域，如图所示，其中 $A(-1,3)$，$B(3,3)$，$C(-1,-1)$，

则可行域的面积为 $\frac{1}{2}\times[3-(-1)]^2=8$.

16. 15　设 $S_6=x$，则 $S_6-S_3=x-6$，$S_9-S_6=27-x$，则 $2(x-6)=6+27-x$，解得 $x=15$.

17. 解：(1)因为 $a=b\sin A+\sqrt{3}a\cos B$，所以 $\sin A=\sin B\sin A+\sqrt{3}\sin A\cos B$. ………… 1 分

又 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin B+\sqrt{3}\cos B=1$，………… 2 分

则 $2\sin(B+\frac{\pi}{3})=1$，即 $\sin(B+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$. ………… 4 分

又 $B+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3})$，所以 $B+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$，………… 5 分

故 $B=\frac{\pi}{2}$. ………… 6 分

(2)因为 $B=\frac{\pi}{2}$，所以 $a^2+c^2=b^2=16$. ………… 7 分

$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac=4$，即 $ac=8$，………… 8 分

则 $(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=32$，………… 10 分

即 $a+c=4\sqrt{2}$，………… 11 分

从而 $\triangle ABC$ 的周长为 $4+4\sqrt{2}$. ………… 12 分

18. 解：(1) $\bar{x}_{甲}=\frac{88+89+91+92+93+93+95+95}{8}=92$，………… 2 分

$\bar{x}_{乙}=\frac{88+90+90+90+92+92+92+94}{8}=91$，………… 4 分

因为 $92>91$，所以甲的面试分数的平均分更高. ………… 6 分

(2)因为笔试分数和面试分数的加权比为 6∶4，

所以甲的综合分数为 $92\times\frac{6}{10}+92\times\frac{4}{10}=92$， …………………………………… 8 分

乙的综合分数为 $94\times\frac{6}{10}+91\times\frac{4}{10}=92.8$， …………………………………… 10 分

因为 $92.8>92$，所以乙的综合分数更高，故应该录取乙. …………………………………… 12 分

19. (1)证明：由四边形 $ABCD$ 为正方形，得 $AD\perp CD$. …………………………………… 1 分

因为 $PC^2=PD^2+CD^2=14$，所以 $PD\perp CD$. …………………………………… 2 分

因为 $PD\cap AD=D$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD. …………………………………… 3 分

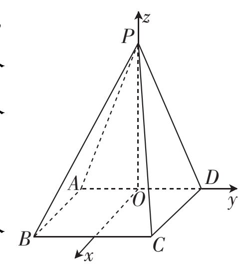
因为 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………… 4 分

(2)解：取 AD 的中点 O，连接 PO，因为 $PA=PD=\sqrt{10}$，所以 $PO\perp AD$，$PO=\sqrt{10-1}=3$.

…………………………………… 5 分

由(1)知平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………… 6 分



以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(2,-1,0)$，

$C(2,1,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,3)$， …………………………………… 7 分

所以 $\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{PC}=(2,1,-3)$，$\overrightarrow{PD}=(0,1,-3)$. …………… 8 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 PBC 的法向量，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ 2x+y-3z=0,\end{cases}$ …………………………………… 9 分

令 $x=3$，得 $\boldsymbol{n}=(3,0,2)$. …………………………………… 10 分

因为 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PD}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PD}|}=\frac{-6}{\sqrt{13}\times\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{130}}{65}$， …………………………………… 11 分

所以 PD 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{130}}{65}$. …………………………………… 12 分

20. 解：(1)由题可知，$a=2$. …………………………………… 1 分

当直线 l 的斜率不存在时，由 $|PQ|=3$，得 $\frac{1}{4}+\frac{9}{4b^2}=1$，则 $b^2=3$， …………………………………… 3 分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………… 4 分

(2)法一：当直线 l 的斜率不存在时，$\triangle APQ$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times3\times[1-(-2)]=\frac{9}{2}$. …… 5 分

当直线 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $y=k(x-1)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

联立方程组 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$， …………… 6 分

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$. …………………………………… 7 分

$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{12(1+k^2)}{3+4k^2}$, ………………………………………… 8 分

点 A 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{3|k|}{\sqrt{1+k^2}}$， ……………………………………………………… 9 分

则△APQ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|PQ|d=\dfrac{18|k|\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}=\dfrac{9}{2}\sqrt{\dfrac{-3}{(3+4k^2)^2}-\dfrac{2}{3+4k^2}+1}$. …… 10 分

因为 $k^2>0$,所以 $0<\dfrac{1}{3+4k^2}<\dfrac{1}{3}$,

则 $0<-\dfrac{3}{(3+4k^2)^2}-\dfrac{2}{3+4k^2}+1<1$, $0<\dfrac{9}{2}\sqrt{\dfrac{-3}{(3+4k^2)^2}-\dfrac{2}{3+4k^2}+1}<\dfrac{9}{2}$. ………… 11 分

综上所述,△APQ 面积的取值范围为$(0,\dfrac{9}{2}]$. ……………………………………………… 12 分

法二:依题意可设直线 l 的方程为 $x=ty+1$, $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$.

联立方程组$\begin{cases}x=ty+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$消去 x 整理得$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$, ………………………… 5 分

则 $y_1+y_2=-\dfrac{6t}{3t^2+4}$, $y_1y_2=-\dfrac{9}{3t^2+4}$. ……………………………………………………… 6 分

$|PQ|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{12t^2+12}{3t^2+4}$. …………………………………………… 7 分

点 A 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{3}{\sqrt{1+t^2}}$, ……………………………………………………………… 8 分

则△APQ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|PQ|d=\dfrac{18\sqrt{1+t^2}}{3t^2+4}=\dfrac{18}{3\sqrt{1+t^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$. ……………………… 9 分

因为 $\sqrt{1+t^2}\geqslant 1$,所以 $3\sqrt{1+t^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\geqslant 4$,所以 $0<\dfrac{18}{3\sqrt{1+t^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}\leqslant\dfrac{9}{2}$. …… 11 分

故△APQ 面积的取值范围为$(0,\dfrac{9}{2}]$. ……………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. ……………………………………………… 1 分

当 $x\in(0,+\infty)$时, $f(x)=2x^2-2a\ln x$,则 $f'(x)=4x-\dfrac{2a}{x}=\dfrac{4(x^2-\frac{1}{2}a)}{x}$, ………… 2 分

当 $a\leqslant 0$ 时, $f'(x)>0$,可知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增, ……………………………………… 3 分

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $x>\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$,令 $f'(x)<0$,得 $0<x<\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$.

因为 $f(-x)=f(x)$,所以 $f(x)$为偶函数,所以当 $a\leqslant 0$ 时, $f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,单调递减区间为$(-\infty,0)$;当 $a>0$ 时, $f(x)$的单调递增区间为$(-\dfrac{\sqrt{2a}}{2},0)$, $(\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$,

$+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,-\frac{\sqrt{2a}}{2})$，$(0,\frac{\sqrt{2a}}{2})$. ………………………………………… 5 分

(2)令 $x^2=t(t>0)$，可得 $f(x)=2t-a\ln t$，

令 $g(t)=2t-a\ln t$，则 $g'(t)=2-\frac{a}{t}=\frac{2t-a}{t}$. ………………………………………… 6 分

当 $a=0$ 时，$g(t)=2t>0$，$g(t)\geqslant 2a-\frac{1}{2}a^2$ 显然成立. ………………………………………… 7 分

当 $a<0$ 时，若 $0<t<e^{\frac{(a-2)^2}{2a}}$，由$\frac{(a-2)^2}{2a}<0$，可得 $0<e^{\frac{(a-2)^2}{2a}}<1$，有 $g(t)=2t-a\ln t<2-a\ln t$ $<2-a\ln e^{\frac{(a-2)^2}{2a}}=2-a\times\frac{(a-2)^2}{2a}=2-\frac{(a-2)^2}{2}=2a-\frac{1}{2}a^2$，与 $g(t)\geqslant 2a-\frac{1}{2}a^2$ 矛盾. ……

………………………………………………………………………………………… 9 分

当 $a>0$ 时，令 $g'(t)>0$，可得 $t>\frac{a}{2}$，可知函数 $g(t)$ 的单调递减区间为$(0,\frac{a}{2})$，单调递增区间为$(\frac{a}{2},+\infty)$，可得 $g(t)_{\min}=g(\frac{a}{2})=a-a\ln\frac{a}{2}$.

若 $g(t)\geqslant 2a-\frac{1}{2}a^2$，则必有 $a-a\ln\frac{a}{2}\geqslant 2a-\frac{1}{2}a^2$，可化为$\frac{a}{2}-\ln\frac{a}{2}-1\geqslant 0$，………… 10 分

令 $h(a)=\frac{a}{2}-\ln\frac{a}{2}-1$，由 $h(a)=\frac{a}{2}-\ln a+\ln 2-1$，可得 $h'(a)=\frac{1}{2}-\frac{1}{a}=\frac{a-2}{2a}$，令 $h'(a)>0$，得 $a>2$，可知 $h(a)$ 的单调递减区间为$(0,2)$，单调递增区间为$(2,+\infty)$，则 $h(a)_{\min}=h(2)=1-\ln 2+\ln 2-1=0$，可知$\frac{a}{2}-\ln\frac{a}{2}-1\geqslant 0$.

综上，a 的取值范围为$[0,+\infty)$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1)圆 C 的普通方程为$(x-3)^2+(y+2)^2=16$. ………………………………………… 2 分

由 $\rho^2-12\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta=-39$，得 $x^2+y^2-12x-4y+39=0$， ………………………… 4 分

即$(x-6)^2+(y-2)^2=1$，

所以圆 D 的直角坐标方程为$(x-6)^2+(y-2)^2=1$. ………………………………………… 5 分

(2)由(1)知圆 C 的圆心为 $C(3,-2)$，半径为 4，………………………………………… 6 分

圆 D 的圆心为 $D(6,2)$，半径为 1. ………………………………………… 7 分

因为 $|CD|=\sqrt{(3-6)^2+(-2-2)^2}=5=4+1$，………………………………………… 9 分

所以圆 C 与圆 D 外切. ………………………………………… 10 分

23. (1)解：由 $f(x)=|2x-3|<7$，得 $-7<2x-3<7$，………………………………………… 2 分

解得 $-2<x<5$，………………………………………… 4 分

所以不等式 $f(x)<7$ 的解集为$(-2,5)$. ………………………………………… 5 分

(2)证明：因为 $|f(x)-|2x-7||=|2x-3-(2x-7)|=4$，………………………………………… 7 分

所以 $-4\leqslant f(x)-|2x-7|\leqslant 4$. ………………………………………… 8 分

因为 $x^2-2x+\sqrt{26}=(x-1)^2+\sqrt{26}-1\geqslant\sqrt{26}-1>5-1=4$，

所以 $f(x)-|2x-7|<x^2-2x+\sqrt{26}$. ………………………………………… 10 分