

绝密★启用前 【考试时间：2020 年 4 月 24 日下午 15:00~17:00】

湖南湖北四校 2020 届高三学情调研联考

文科数学试题卷参考答案及解析

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	B	C	B	A	D	C	B	B	C	B	A	D

1、B 【解析】由题意得， $P=[0,4]$ ， $Q=(-3,3)$ ， $\therefore P \cup Q=(-3,4]$ ，故选 B。

2、C 【解析】设 $x=a+bi$ ， $y=a-bi$ ，代入得 $(2a)^2-3(a^2+b^2)i=4-6i$ ，所以

$$(2a)^2=4, 3(a^2+b^2)=6, \text{ 解得 } |a|=1, |b|=1, \text{ 所以 } |x|+|y|=2\sqrt{2}.$$

3、B 解析：设大正方体的边长为 x ，则小正方体的边长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}x$ ，设落在小正

$$\text{方形内的米粒数大约为 } N, \text{ 则 } \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}x\right)^2}{x^2}=\frac{N}{200}, \text{ 解得： } N \approx 27.$$

4、A 【解析】 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ ，

$$\text{所以 } \lambda=\frac{1}{4}, \mu=\frac{3}{4}, \text{ 从而求得 } \frac{\lambda}{\mu}=\frac{1}{3}.$$

5、D 解析： $\because$ 函数 $f(x)$ 是偶函数， $\therefore f(x)=f(-x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上恒成立， $\therefore m=0$ ， $\therefore$ 当 $x \geq 0$ 时，

易得 $f(x)=2^x-1$ 为增函数， $\therefore a=f(\log_{0.5}3)=f(\log_23)$ ， $b=f(\log_25)$ ， $c=f(2)$ ， $\therefore$

$$\log_23 < 2 < \log_25, \therefore a < c < b$$

6、C 由三视图可知多面体是棱长为 2 的正方体中的三棱锥 $P-ABC$ ，

$$\text{故 } AC=1, PA=2, BC=PC=\sqrt{5}, AB=2\sqrt{2}, PB=2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2} \times 2 \times 1=1, S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}, S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2}=\sqrt{6},$$

$\therefore$ 该多面体的侧面最大面积为 $2\sqrt{2}$ 。故选 C。

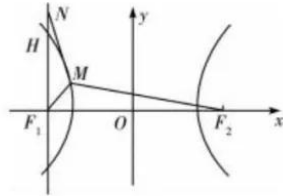
7、B 解析：双曲线 C 左支上的任意一点 M 均满足 $|MF_2|+|MN|>4b$ ，

$$\text{即 } (|MF_2|+|MN|)_{\min}>4b,$$

$$\text{又 } |MF_2|+|MN|\geq 2a+|MF_1|+|MN|\geq 2a+|NF_2|=2a+\frac{3b^2}{2a}$$

文数答案 第 1 页，总 9 页

$$\begin{aligned}\therefore 2a + \frac{3b^2}{2a} > 4b &\Rightarrow 4a^2 + 3b^2 > 8ab \\ \Rightarrow 3 \cdot \frac{b}{a} + 4 \cdot \frac{a}{b} - 8 > 0 &\Rightarrow \frac{b}{a} > 2 \text{ 或 } \frac{b}{a} < \frac{2}{3} \\ \therefore e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}, e > \sqrt{5} \text{ 或 } 1 < N < \frac{\sqrt{13}}{3}\end{aligned}$$



8、B 详解：由 $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$ 得程序框图先对奇数项累加，偶数项累加，最后再相减. 因此在空白框中应填入 $i = i + 2$ ，选 B.

9、C 【解析】 $\because a \cos B - b \cos A = \frac{3}{5}c$ $\therefore$ 由正弦定理，得

$$\sin A \cos B - \sin B \cos A = \frac{3}{5} \sin C,$$

$$\because C = \pi - (A + B) \Rightarrow \sin C = \sin(A + B),$$

$$\therefore \sin A \cos B - \sin B \cos A = \frac{3}{5} (\sin A \cos B + \cos A \sin B),$$

整理，得 $\sin A \cos B = 4 \sin B \cos A$ ，同除以 $\cos A \cos B$ ，得 $\tan A = 4 \tan B$ ，由此可得

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{3 \tan B}{1 + 4 \tan^2 B} = \frac{3}{\frac{1}{\tan B} + 4 \tan B}, \because A, B \text{ 是三角形内角, 且}$$

$\tan A$ 与 $\tan B$ 同号， $\therefore A, B$ 都是锐角，即 $\tan A > 0, \tan B > 0$,

$$\therefore \frac{1}{\tan B} + 4 \tan B \geq 2 \sqrt{\frac{1}{\tan B} \cdot 4 \tan B} = 4$$

$$\tan(A - B) = \frac{3}{\frac{1}{\tan B} + 4 \tan B} \leq \frac{3}{4},$$

当且仅当 $\frac{1}{\tan B} = 4 \tan B$ ，即 $\tan B = \frac{1}{2}$ 时， $\tan(A - B)$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$.

$$10、B \text{ 解析：} \because 2 \cos^2\left(\frac{\omega x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin \omega x,$$

$$f(x) = \sin \omega x (1 + \sin \omega x) - \sin^2 \omega x = \sin \omega x.$$

令 $\omega x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 可得 $x = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}$, $\therefore f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上恰好取得一次最大值, $\therefore$

$$0 \leq \frac{\pi}{2\omega} \leq \pi \text{ 解得 } \omega \geq \frac{1}{2}.$$

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 解得: $-\frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega} \leq x \leq \frac{\pi}{2\omega} + \frac{2k\pi}{\omega}$, $\therefore f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ 上是增函数,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{2\pi}{3} \geq -\frac{\pi}{2\omega} \\ \frac{5\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2\omega} \end{cases} \text{ 解得 } \omega \leq \frac{3}{5}. \text{ 综上, } \frac{1}{2} \leq \omega \leq \frac{3}{5}. \text{ 故选: B.}$$

11、A 解析: 因为 $a > b > 0$, 所以双曲线的渐近线如图所示,

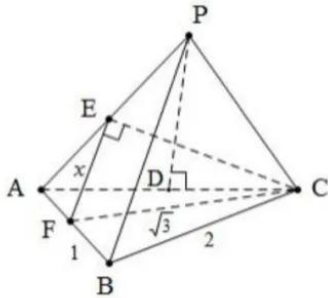
设内切圆圆心为 M , 则 M 在 $\angle AOB$ 平分线 OF 上,

过点 M 分别作 $MN \perp OA$ 于 N , $MT \perp AB$ 于 T , 由 $FA \perp OA$ 得四边形 $MTAN$ 为正方形, 由

焦点到渐近线的距离为 b 得 $FA = b$, 又 $OF = c$, 所以 $OA = a$, $|NA| = |MN| = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a$, 所以

$$|NO| = \frac{3-\sqrt{3}}{2}a, \text{ 所以 } \frac{b}{a} = \tan \angle AOF = \frac{|MN|}{|NO|} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 得 } e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ 故选 A.}$$

12、D 解析: 方法一: 本题也可用解三角形方法, 达到求出棱长的目的. 适合空间想象能力略差学生.



设 $PA = PB = PC = 2x$, E, F 分别为 PA, AB 中点,

$\therefore EF \parallel PB$, 且 $EF = \frac{1}{2}PB = x$, $\therefore \triangle ABC$ 为边长为 2 的等边三角形,

$\therefore CF = \sqrt{3}$ 又 $\angle CEF = 90^\circ \therefore CE = \sqrt{3-x^2}$, $AE = \frac{1}{2}PA = x$

$\triangle AEC$ 中余弦定理 $\cos \angle EAC = \frac{x^2 + 4 - (3-x^2)}{2 \times 2 \times x}$, 作 $PD \perp AC$ 于 D , $\therefore PA = PC$,

$\because D$ 为 AC 中点, $\cos \angle EAC = \frac{AD}{PA} = \frac{1}{2x}$, $\therefore \frac{x^2 + 4 - 3 + x^2}{4x} = \frac{1}{2x}$,
 $\therefore 2x^2 + 1 = 2 \therefore x^2 = \frac{1}{2} \therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore PA = PB = PC = \sqrt{2}$, 又 $AB = BC = AC = 2$, $\therefore PA, PB, PC$
 两两垂直, $\therefore 2R = \sqrt{2+2+2} = \sqrt{6}$, $\therefore R = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\therefore V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{6\sqrt{6}}{8} = \sqrt{6}\pi$, 故选 D.
 方法二: $\because PA = PB = PC$, $\triangle ABC$ 为边长为 2 的等边三角形, $\therefore P-ABC$ 为正三棱锥,
 $\therefore PB \perp AC$, 又 E, F 分别为 PA, AB 中点,
 $\therefore EF \parallel PB$, $\therefore EF \perp AC$, 又 $EF \perp CE$, $CE \cap AC = C$, $\therefore EF \perp$ 平面 PAC , $PB \perp$ 平面 PAC ,
 $\therefore \angle PAB = 90^\circ$, $\therefore PA = PB = PC = \sqrt{2}$, $\therefore P-ABC$ 为正方体一部分, $2R = \sqrt{2+2+2} = \sqrt{6}$, 即
 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\therefore V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{6\sqrt{6}}{8} = \sqrt{6}\pi$, 故选 D.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13、 $\forall x \in (0, +\infty)$, $\ln x \neq x - 1$

14、 $F + V - E = 2$

解析: 凸多面体的面数为 F , 顶点数为 V 和棱数为 E ,

① 正方体: $F=6, V=8, E=12$, 得 $F+V-E=8+6-12=2$;

② 三棱柱: $F=5, V=6, E=9$, 得 $F+V-E=5+6-9=2$;

③ 三棱锥: $F=4, V=4, E=6$, 得 $F+V-E=4+4-6=2$.

根据以上几个例子, 猜想: 凸多面体的面数 F , 顶点数 V 和棱数 E 满足如下关系:

$$F + V - E = 2$$

再通过举四棱锥、六棱柱、...等等, 发现上述公式都成立。

因此归纳出一般结论: $F + V - E = 2$

故答案为: $F + V - E = 2$

15、 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ 解析: $\because f(x) = e^x(x-1), \therefore f'(x) = xe^x$, $\therefore$ 对于任意的 $x \in [-2, 2]$, 当 $x \in [-2, 0)$

时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $[-2, 0)$ 上为减函数, 在 $(0, 2]$ 上为增函

数. $\therefore x=0$ 为 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的极小值点, 也是最小值点且最小值为 $[-2, 2]$,

$\therefore$ 对于任意的 $x_1 \in [-2, 2], f(x_1)_{\min} = -1$, 而总存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) > g(x_2)$,

$f(x_1)_{\min} > g(x_2)_{\min} \therefore g(x) = mx$, $\therefore$ ① $m=0$ 时, $g(x_2) = 0$, 不合题意,

② $m > 0$ 时, $g(x_2) = mx_2 \in [m, 2m]$, 此时 $m < -1$, 不合题意, ③ $m < 0$ 时,

文数答案 第 4 页, 总 9 页

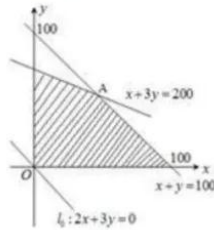
$$g(x_2) = mx_2 \in [2m, m],$$

$$\therefore g(x_2)_{\min} = 2m, \therefore 2m < -1, m < -\frac{1}{2}.$$

16、850【解析】依题意，每天生产的玩具A型商品 x 个、B商品 y 个、C商品的个数等于： $100-x-y$ ，所以每天的利润 $T=8x+9y+6(100-x-y)=2x+3y+600$ 。

$$\text{约束条件为: } \begin{cases} 5x+7y+4(100-x-y) \leq 600 \\ 100-x-y \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0, x, y \in N^* \end{cases}, \text{ 整理得 } \begin{cases} x+3y \leq 200 \\ x+y \leq 100 \\ x, y \in N^* \end{cases}.$$

为 $T=2x+3y+600$ 。如图所示，做出可行域。



初始直线 $l_0: 2x+3y=0$ ，平移初始直线经过点A时， T 有最大值。由 $\begin{cases} x+3y=200 \\ x+y=100 \end{cases}$

得 $\begin{cases} x=50 \\ y=50 \end{cases}$ 。最优解为 $A(50, 50)$ ，此时 $T_{\max}=850$ (元)，即最大日利润是850元。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

$$17、(1) \because b_{n+1} = \frac{b_n}{(1-a_n)(1+a_n)} = \frac{b_n}{b_n(2-b_n)} = \frac{1}{2-b_n}, \therefore b_{n+1}-1 = \frac{1}{2-b_n}-1 \therefore$$

$$\frac{1}{b_{n+1}-1} = \frac{2-b_n}{b_n-1} = -1 + \frac{1}{b_n-1}. \therefore \text{数列 } \left\{ \frac{1}{b_n-1} \right\} \text{ 是以 } -4 \text{ 为首项， } -1 \text{ 为公差的等差数列.}$$

$$\therefore \frac{1}{b_n-1} = -4 - (n-1) = -n-3, \therefore b_n = 1 - \frac{1}{n+3} = \frac{n+2}{n+3}.$$

$$(2) \because a_n = 1 - b_n = \frac{1}{n+3}.$$

$$\therefore S_n = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1} = \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \cdots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+4} = \frac{n}{4(n+4)}$$

$$\therefore 4a_n S_n - b_n = \frac{an}{n+4} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{(a-1)n^2 + (3a-6)n - 8}{(n+3)(n+4)}. \text{ 由条件可知}$$

$(a-1)n^2 + (3a-6)n - 8 < 0$ 恒成立即可满足条件, 设 $f(n) = (a-1)n^2 + 3(a-2)n - 8$, 当 $a=1$

时, $f(n) = -3n - 8 < 0$ 恒成立, 当 $a > 1$ 时, 由二次函数的性质知不可能成立. 当 $a < 1$ 时,

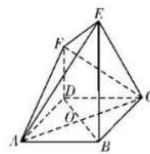
对称轴 $-\frac{3}{2} \cdot \frac{a-2}{a-1} = -\frac{3}{2}(1 - \frac{1}{a-1}) < 0$, $f(n)$ 在 $[1, +\infty)$ 为单调递减函数.

$f(1) = (a-1) + (3a-6) - 8 = 4a - 15 < 0$, $\therefore a < \frac{15}{4}$, $\therefore$ 时 $4aS_n < b$ 恒成立. 综上知: $a < 1$

时, $4aS_n < b$ 恒成立.

18. 【解析】(1) 连接 DB , $DF \perp$ 平面 $ABCD$, $EB \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore EB \parallel FD$, $\therefore E, F, D, B$ 四点共面, $\therefore AC \perp EB$, 3 分 设 $DB \cap AC = O$, $\because ABCD$ 为菱形, $\therefore AC \perp DB$, $DB \cap EB = B$, $\therefore AC \perp$ 平面 $EFDB$, $\because EF \subset$ 平面 $EFDB$, $\therefore AC \perp EF$. 6 分

(2) $\because EB \parallel FD$, $EB \perp BD$, $\therefore EFDB$ 为直角梯形, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = 60^\circ$, $AB = 2$, $BD = 2$, $AO = CO = \sqrt{3}$, $\therefore$ 梯形 $EFDB$ 的面积 $S = \frac{(2+4) \times 2}{2} = 6$, 9 分 $\because AC \perp$ 平面 $EFDB$, $\therefore V_{EFABCD} = V_{C-EFDB} + V_{A-EFDB} = \frac{1}{3}S \times AO + \frac{1}{3}S \times CO = 4\sqrt{3}$. 12 分



解析: (1) 甲解密成功所需时间的中位数为 47,
 $\therefore 0.01 \times 5 + 0.014 \times 5 + b \times 5 + 0.034 \times 5 + 0.04 \times$
 $(47 - 45) = 0.5$,

解得 $b = 0.026$;

$\therefore 0.04 \times 3 + 0.032 \times 5 + a \times 5 + 0.010 \times 10 = 0.5$,

解得 $a = 0.024$;

$\therefore$ 甲在 1 分钟内解密成功的频率是 $f = 1 - 0.01 \times 10 = 0.9$ (4 分)

(2) ①由题意及 (1) 可知第一个出场选手解密成功的概率为 $P_1 = 0.9$;

第二个出场选手解密成功的概率为 $P_2 = 0.9 \times \frac{9}{10} + \frac{1}{10} \times 1 = 0.91$,

第三个出场选手解密成功的概率为 $P_3 = 0.9 \times (\frac{9}{10})^2 + \frac{1}{10} \times 2 = 0.929$,

所以该团队挑战成功的概率为 $P = 0.9 + 0.1 \times 0.91 + 0.1 \times 0.09 \times 0.929 = 0.999361$

(或令“该团队挑战成功”的事件为 A , “挑战不成功”的事件为 $\bar{A}$,

$P(\bar{A}) = (1 - 0.9)(1 - 0.91)(1 - 0.929) = 0.1 \times 0.09 \times 0.071 = 0.000639$,

$\therefore$ 该团队挑战成功的概率为 $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.000639 = 0.999361$ (8 分)

②由①可知按 P_i 从小到大的顺序的概率分别 p_1, p_2, p_3 ,

根据题意知 X 的取值为 1, 2, 3;

则 $P(X=1) = 0.9, P(X=2) = (1 - 0.9) \times 0.91 = 0.091$,

$P(X=3) = (1 - 0.9)(1 - 0.91) = 0.1 \times 0.09 = 0.009$.

20、(1) 因为 $c=m, e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$, 则 $a=2m, b=\sqrt{3}m$, 所以 $\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{b}$ 取最小值时 $m=1$,

此时抛物线 $C_1: y^2=-4x$, 此时 $a=2, b^2=3$, 所以椭圆 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$;

(2) 因为 $c=m, e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$, 则 $a=2m, b=\sqrt{3}m$, 设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4m^2}+\frac{y^2}{3m^2}=1$,

$P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1)$ 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4m^2}+\frac{y^2}{3m^2}=1 \\ y^2=-4mx \end{cases}$ 得 $3x^2-16mx-12m^2=0$, 所以 $x_0=-\frac{2}{3}m$ 或

$x_0=6m$ (舍去), 代入抛物线方程得 $y_0=\frac{2\sqrt{6}}{3}m$, 即 $P\left(-\frac{2m}{3}, \frac{2\sqrt{6}m}{3}\right)$,

于是 $|PF_1|=\frac{5m}{3}, |PF_2|=2a-|PF_1|=\frac{7m}{3}, |F_1F_2|=2m=\frac{6m}{3}$, 又 $\triangle PF_1F_2$ 的边长恰好是三个

连续的自然数, 所以 $m=3$. 此时抛物线方程为 $y^2=-12x$, $F_1(-3, 0), P(-2, 2\sqrt{6})$, 则

直线 PQ 的方程为 $y=2\sqrt{6}(x+3)$. 联立 $\begin{cases} y=2\sqrt{6}(x+3) \\ y^2=-12x \end{cases}$, 得 $x_1=-\frac{9}{2}$ 或 $x_1=-2$ (舍去),

于是 $Q\left(-\frac{9}{2}, -3\sqrt{6}\right)$. 所以 $|PQ|=\sqrt{\left(-2+\frac{9}{2}\right)^2+\left(2\sqrt{6}+3\sqrt{6}\right)^2}=\frac{25}{2}$,

设 $M\left(-\frac{t^2}{12}, t\right) (t \in (-3\sqrt{6}, 2\sqrt{6}))$ 到直线 PQ 的距离为 d , 则 $d=\frac{\sqrt{6}}{30} \times \left|t+\frac{\sqrt{6}}{2}\right|-\frac{75}{2}$,

当 $t=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时, $d_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{30} \times \frac{75}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{4}$, 所以 $\triangle MPQ$ 的面积最大值为

$\frac{1}{2} \times \frac{25}{2} \times \frac{5\sqrt{6}}{4}=\frac{125\sqrt{6}}{16}$. 此时 $MP: y=-\frac{4}{3}\sqrt{6}x+\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

21、(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x)=\frac{1}{e}+\frac{a}{x}=\frac{x+ae}{ex}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点

(x_0, y_0) 处的切线方程为 $y=\frac{2}{e}x$. 由题意得 $\begin{cases} \frac{1}{e}+\frac{a}{x_0}=\frac{2}{e} \\ \frac{2}{e}x_0=\frac{x_0}{e}+a\ln x_0 \end{cases}$ 解得 $a=1$,

$x_0=e$. 所以 a 的值为 1.

文数答案 第 7 页, 总 9 页

(2) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = \frac{x}{e} - \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \frac{x-e}{ex}$, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > e$,

由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < e$, 则 $f(x)$ 有最小值为 $f(e) = 0$, 即 $f(x) \geq 0$, 所以

$g(x) = \frac{x}{e} - \ln x - \frac{\ln x}{x} + b$, ($x > 0$), 由已知可得函数 $y = \ln x + \frac{\ln x}{x} - \frac{x}{e}$ 的图象与直线

$y = b$ 有两个交点,

设 $h(x) = \ln x + \frac{\ln x}{x} - \frac{x}{e}$ ($x > 0$), 则 $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1 - \ln x}{x^2} - \frac{1}{e} = \frac{ex + e - e \ln x - x^2}{ex^2}$,

令 $\varphi(x) = ex + e - e \ln x - x^2$, $\varphi'(x) = e - \frac{e}{x} - 2x = \frac{ex - e - 2x^2}{x}$,

由 $ex - e - 2x^2 < 0$, 可知 $\varphi'(x) < 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数,

由 $\varphi(e) = 0$, 得 $0 < x < e$ 时, $\varphi(x) > 0$, 当 $x > e$ 时, $\varphi(x) < 0$,

即当 $0 < x < e$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x > e$ 时, $h'(x) < 0$,

则函数 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上为增函数, 在 $(e, +\infty)$ 上为减函数,

所以, 函数 $h(x)$ 在 $x = e$ 处取得极大值 $h(e) = \frac{1}{e}$,

又 $h(1) = -\frac{1}{e}$, $h(e^3) = 3 + \frac{3}{e^3} - e^2 < 4 - e^2 < -1 < -\frac{1}{e}$,

所以, 当函数 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有两个零点时, b 的取值范围是 $-\frac{1}{e} < b < \frac{1}{e}$,

即 $b \in \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$.

22、(1) 由题意可知: 直线 l 的普通方程为 $x + y + 1 = 0$, $\therefore A(-1, 0)$, $B(0, -1)$ C_1 的方程可化

为 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$), 设点 P 的坐标为 $(\cos \theta, \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$,

$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} = -\cos \theta + \sin \theta + 1 = \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \in [0, \sqrt{2} + 1]$

(2) 曲线 C_2 的直角坐标方程为: $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$ 直线 l 的标准参数方程为

$\begin{cases} x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}m \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}m \end{cases}$ (m 为参数), 代入 C_2 得: $m^2 - \sqrt{2}m - 7 = 0$ 设 M, N 两点对应的参数分别为

$$m_1, m_2$$

$$m_1 + m_2 = \sqrt{2}, m_1 m_2 = -7 < 0 \text{ 故 } m_1, m_2 \text{ 异号 } \therefore \|QM\| - \|QN\| = |m_1 + m_2| = \sqrt{2}$$

$$23、\text{答案：(1) 当 } m = -2 \text{ 时，} f(x) = |2x| + |2x+3| - 2 = \begin{cases} 4x+1 & (x \geq 0) \\ 1(-\frac{3}{2} < x < 0) \\ -4x-5 & (x \leq -\frac{3}{2}) \end{cases}$$

$$\text{当 } \begin{cases} 4x+1 \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ 解得 } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ 当 } -\frac{3}{2} < x < 0, 1 \leq 3 \text{ 恒成立.}$$

$$\text{当 } \begin{cases} -4x-5 \leq 3 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ 解得 } -2 \leq x \leq -\frac{3}{2}, \text{ 此不等式的解集为 } [-2, -\frac{3}{2}].$$

$$(2) f(x) = |2x| + |2x+3| + m = \begin{cases} 4x+3+m & (x \geq 0) \\ 3+m & (-\frac{3}{2} < x < 0) \\ -4x-3+m & (x \leq -\frac{3}{2}) \end{cases},$$

$$\text{当 } x \in (-\infty, 0) \text{ 时，} f(x) = |2x| + |2x+3| + m = \begin{cases} 3+m & (-\frac{3}{2} < x < 0) \\ -4x-3+m & (x \leq -\frac{3}{2}) \end{cases}$$

$$\text{当 } -\frac{3}{2} < x < 0 \text{ 时，} f(x) = 3+m, \text{ 当 } x \leq -\frac{3}{2}, f(x) = -4x-3+m \text{ 单调递减，}$$

$$\therefore f(x) \text{ 的最小值为 } 3+m$$

$$\text{设 } g(x) = x + \frac{2}{x} (x < 0)$$

$$\text{当 } -x > 0, -x + \frac{2}{-x} \geq 2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } -x = \frac{2}{-x} \text{ 时，取等号 } \therefore x + \frac{2}{x} \leq -2\sqrt{2}$$

$$\text{即 } x = -\sqrt{2} \text{ 时，} g(x) \text{ 取得最大值 } -2\sqrt{2}.$$

$$\text{要使 } f(x) \geq x + \frac{2}{x} \text{ 恒成立，只需 } m+3 \geq -2\sqrt{2}, \text{ 即 } m \geq -2\sqrt{2}-3.$$

自主招生在线创始于 2014 年，是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站(www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案（更新下载中），点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html>