

长安一中 2022-2023 学年度第二学期期末考试

高二数学理科试题答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	B	C	A	D	A	D	B	B	B

二、填空题

13.1 14. 672 15. $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right]$ 16. 678

三、解答题

17、【详解】解：(1) 因为 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, n \text{ 为奇数时} \\ a_n - 2, n \text{ 为偶数时} \end{cases}$

所以， $b_{n+1} = a_{2n+1} = a_{2n} - 2 = a_{2n-1} + 1 - 2 = a_{2n-1} - 1 = b_n - 1$,

且 $b_1 = a_1 = 1$ ，所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公差为 -1 的等差数列； -----4 分

(2) $\{c_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的偶数项组成的数列，

$$c_1 = a_2 = a_1 + 1 = 2$$

$$c_2 = a_4 = a_3 + 1 = a_2 - 2 + 1 = 1$$

$$c_3 = a_6 = a_5 + 1 = a_4 - 2 + 1 = 0$$

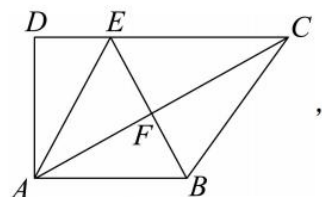
因为 $c_{n+1} = a_{2n+2} = a_{2n+1} + 1 = a_{2n} - 2 + 1 = a_{2n} - 1 = c_n - 1$,

所以数列 $\{c_n\}$ 是首项为 2，公差为 -1 的等差数列， -----8 分

结合 (1) 可知， $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项都是以 -1 为公差的等差数列，

$$\begin{aligned} S_{50} &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{50} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{49}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{50}) \\ &= 1 \times 25 + \frac{25 \times 24}{2} \times (-1) + 2 \times 25 + \frac{25 \times 24}{2} \times (-1) = -525 \end{aligned} \quad \text{-----12 分}$$

18、(1) 证明：如图所示：



连接 AC ，交 BE 于 F ，

因为 $\angle D = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $DC = 6$ ， $AD = 2\sqrt{3}$ ， $\overline{CE} = 2\overline{ED}$ ，所以 $AE = 4$ ，

又 $AB \parallel CD$ ，所以四边形 $ABCE$ 是菱形，所以 $FC \perp BE$ ，

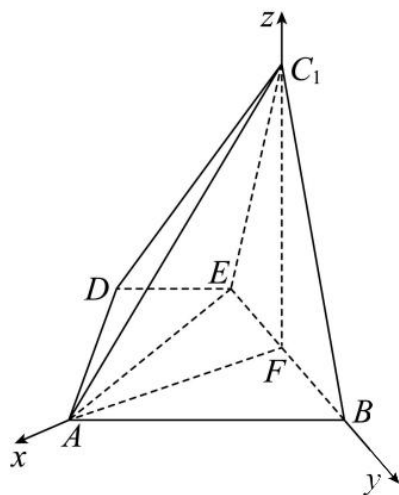
在 $\triangle ACD$ 中， $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 4\sqrt{3}$ ，

所以 $AF = CF = 2\sqrt{3}$ ，又 $AC_1 = 2\sqrt{6}$ ，则 $AC_1^2 = AF^2 + CF^2$ ，

所以 $CF \perp AF$ ，又 $AF \cap BE = F$ ，所以 $CF \perp$ 平面 $ABED$ ，

又因为 $CF \subset$ 平面 BCF ，所以平面 $BCE \perp$ 平面 $ADEB$ -----4 分

(2) 由 (1) 建立如图所示空间直角坐标系：



则 $D(\sqrt{3}, -3, 0)$ ， $C_1(0, 0, 2\sqrt{3})$ ， $B(0, 2, 0)$ ， $E(0, -2, 0)$ ， $A(2\sqrt{3}, 0, 0)$ ，-----5 分

所以 $\overrightarrow{BA} = (2\sqrt{3}, -2, 0)$ ， $\overrightarrow{BE} = (0, -4, 0)$ ，因为 $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC_1}$ ，

所以 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{BD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC_1} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -4, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ，-----7 分

设平面 BEP 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$ ，

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} -2y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2y + \frac{\sqrt{3}}{3}z = 0 \end{cases}$ ，令 $x = 1$ ，得 $\vec{m} = (1, 0, -1)$ ，-----9 分

易知平面 BEA 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ ，-----10 分

所以 $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则 $\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{3\pi}{4}$ ，-----11 分

理科数学答案第 2 页



易知二面角 $P-BE-A$ 的平面角是锐角, 所以二面角 $P-BE-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$. -----12 分

19. 【详解】(1) 由题意知 $100 \times (0.0015 + a + 0.0025 + 0.0015 + 0.001) = 1$,

解得 $a = 0.0035$, -----2 分

样本平均数 $\bar{x} = 500 \times 0.15 + 600 \times 0.35 + 700 \times 0.25 + 800 \times 0.15 + 900 \times 0.10 = 670$,

中位数 650, 众数 600. -----5 分

(2) 由题意, 从 $[650, 750]$ 中抽取 5 人, 从 $[750, 850]$ 中抽取 3 人,

随机变量 x 的所有可能取值有 0, 1, 2, 3. -----6 分

$P(x=k) = \frac{C_3^k C_5^{3-k}}{C_8^3} (k=0,1,2,3)$, 所以随机变量 X 的分布列为:

P	0	1	2	3
X	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X) = \frac{30}{56} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{9}{8}$. -----12 分

20. 【详解】(1) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x}{e^x}$, 令 $f'(x) = 0$ 可得 $x = 1$,

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x > 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 - \ln x < 0$.

于是 $f(x)$ 增函数区间为 $(0,1)$; 单调减区间为 $(1,+\infty)$. -----4 分

(2) $g(x) = (x^2 + x) \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x}{e^x} = \frac{1 - x^2 - (x^2 + x) \ln x}{e^x} = \frac{x+1}{e^x} (1 - x - x \ln x), x \in (0, +\infty)$

因此对任意的 $x > 0$, $g(x) < 1 + e^{-2}$ 等价于 $(1 - x - x \ln x) < \frac{e^x}{x+1} (1 + e^{-2})$ -----6 分

设 $h(x) = 1 - x - x \ln x, x \in (0, +\infty)$ 所以 $h'(x) = -\ln x - 2 = -(\ln x - \ln e^{-2})$ -----8 分

因此 $x \in (0, e^{-2})$ 时, $h'(x) > 0, h(x) \nearrow$, $x \in (e^{-2}, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0, h(x) \searrow$

所以 $h(x)_{\max} = h(e^{-2}) = 1 + e^{-2}$, 故 $(1 - x - x \ln x) \leq 1 + e^{-2}$.



设 $\varphi(x) = e^x - (x+1)$, 则 $\varphi'(x) = e^x - 1 = e^x - e^0$, -----10 分

$\because x > 0, \therefore \varphi'(x) > 0, \varphi(x) \nearrow, \therefore \varphi(x) > \varphi(0) = 0$, 即 $\frac{e^x}{x+1} > 1$.

$\therefore (1-x-x\ln x) < \frac{e^x}{x+1}(1+e^{-2})$, 对任意的 $x > 0, g(x) < 1+e^{-2}$. -----12 分

21. 【详解】(1) 由题意得 $\begin{cases} 2a+2c=6 \\ a-c=1 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{3} \\ c=1 \end{cases}$,

椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, -----3 分

$F_1(-1,0)$, 所以抛物线的方程为 $y^2 = -4x$. -----4 分

(2) 由题意得直线 l 的斜率不为 0, $Q(-2,0)$,

设直线 l 的方程为 $x = my - 2$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$,

由 $\begin{cases} x = my - 2 \\ y^2 = -4x \end{cases}$, 得 $y^2 + 4my - 8 = 0, \therefore y_1 + y_2 = -4m, y_1 y_2 = -8$, -----5 分

$\therefore S_2 = \frac{13}{3} S_1$,

$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| \sin \angle AOB}{\frac{1}{2}|OC| \cdot |OD| \sin \angle COD} = \frac{|OA| \cdot |OB|}{|OC| \cdot |OD|} = \left| \frac{y_1}{y_3} \right| \left| \frac{y_2}{y_4} \right| = \left| \frac{y_1 y_2}{y_3 y_4} \right| = \frac{13}{3}$, -----6 分

$\because y_1^2 = -4x_1, \therefore$ 直线 OA 的斜率为 $\frac{y_1}{x_1} = -\frac{4}{y_1}$, 即直线 OA 的方程为 $y = -\frac{4}{y_1}x$,

由 $\begin{cases} y = -\frac{4}{y_1}x \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 得 $y_3^2 = \frac{3 \times 64}{3y_1^2 + 64}$, 同理可得 $y_4^2 = \frac{3 \times 64}{3y_2^2 + 64}$ -----8 分

$y_3^2 \cdot y_4^2 = \frac{3 \times 64}{3y_1^2 + 64} \times \frac{3 \times 64}{3y_2^2 + 64} = \frac{3^2 \times 64^2}{9y_1^2 y_2^2 + 3 \times 64(y_1^2 + y_2^2) + 64^2} = \frac{3^2 \times 64^2}{9 \times 64 + 3 \times 64 \times [(-4m)^2 + 16] + 64^2}$
 $\frac{3^2 \times 64}{48m^2 + 121}$, -----10 分

$(\frac{S_2}{S_1})^2 = \frac{|y_1 y_2|^2}{|y_3 y_4|^2} = \frac{121 + 48m^2}{9} = \frac{13^2}{3^2}$, 得 $m = \pm 1$, -----11 分



∴ 存在直线 l , 方程为 $x - y + 2 = 0$ 或 $x + y + 2 = 0$.

-----12 分

22. 【详解】(1) 因为 $2\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = m - 2\sqrt{3}$, 所以 $2\rho \sin\theta \cos\frac{\pi}{3} - 2\rho \cos\theta \sin\frac{\pi}{3} = m - 2\sqrt{3}$

又因为 $\rho \sin\theta = y, \rho \cos\theta = x$, 所以化简为 $y = \sqrt{3}(x - 2) + m$,

所以直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{2}t \\ y = m + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数})$ -----3 分

由 $\begin{cases} x = 2 + 4\cos\varphi \\ y = 4\sin\varphi \end{cases}$ 消去 φ 得: $(x - 2)^2 + y^2 = 16$,

所以曲线 C 的普通方程 $(x - 2)^2 + y^2 = 16$. -----5 分

(2) 由 $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \mathbf{0}$ 知 $\overrightarrow{PA}$ 与 $\overrightarrow{PB}$ 反向, 所以点 $P(2, m)$ 在圆内, -----6 分

联立直线 l 的参数方程和曲线 C 的普通方程, 可得 $t^2 + \sqrt{3}mt + m^2 - 16 = 0$,

设 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 . 故 $t_1 + t_2 = -\sqrt{3}m$, $t_1 \cdot t_2 = m^2 - 16$

由 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 \cdot t_2 < 0 \end{cases}$, 解得 $-8 < m < 8$. -----8 分

又因为 $t_1 \cdot t_2 < 0$, 由于 $t_1 = -2t_2$, 代入①②得 $7m^2 = 16$,

解得 $m = \pm \frac{4\sqrt{7}}{7}$ (符合 m 的取值范围). -----10 分

23. 【详解】(1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) > 8 \Leftrightarrow |x - 6| + |x - 2| > 8$

当 $x \leq 2$ 时, 有 $2x - 8 > 8$, 解得 $x > 8$, 此时得 $x > 8$;

当 $2 < x < 6$ 时, 有 $6 - x + x - 2 > 8$, 此时无解;

当 $x \geq 6$ 时, 有 $6 - x + 2 - x > 8$, 解得 $x < 0$, 此时得 $x < 0$. -----4 分

综上, 不等式 $f(x) > 8$ 的解集为 $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$. -----5 分

(2) 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 恒有 $f(x) \geq a$, 则 $f(x)_{\min} \geq a$

因为 $f(x) = |x - a^2 - 2| + |x - a| \geq |a^2 - a + 2|$, 所以 $|a^2 - a + 2| \geq a$ -----7 分

即 $a^2 - a + 2 \geq a$, 解得 $a \leq \sqrt{3}$ 或 $a \geq -\sqrt{3}$ -----9 分

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ -----10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线