文数参考答案及评分细则

一、选择题

1. C 【解析】$\because A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x>0\}$，$\therefore A\cap B=\{x|0<x\leqslant 1\}$. 故选 C.

2. D 【解析】$\because z=\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{2\mathrm{i}-2}{2}=-1+\mathrm{i}$，$\therefore z$ 的虚部为 1. 故选 D.

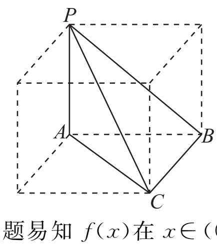
3. D 【解析】在等差数列$\{a_n\}$中，$\because a_2+a_{10}=2a_6=0$，$\therefore a_6=0$，又$\because a_6+a_8=2a_7=-4$，$\therefore a_7=-2$，$\therefore$公差为 $d=a_7-a_6=-2$. 故选 D.

4. A 【解析】$\because \sin(\pi-\alpha)=\frac{2}{3}$，$\therefore \sin\alpha=\frac{2}{3}$，

$\therefore \frac{\sin(2\alpha+\pi)}{\cos\alpha}=\frac{-\sin 2\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=-2\sin\alpha=-\frac{4}{3}$. 故选 A.

5. B 【解析】$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$，又 $\because BD=DC$，$\therefore \overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{CD}$，$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，又 $\because ED=2AE$，$\therefore AE=\frac{1}{3}AD$，$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. 故选 B.

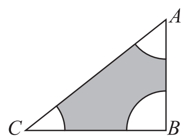
6. A 【解析】根据三视图画出该几何体的直观图为如图所示的四面体 $P-ABC$，其中 PA 垂直于等腰直角三角形 ABC 所在的平面. 将其放置于正方体中(如图所示)，可知该正方体的棱长为 1，所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$，$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以表面中最大面的面积为$\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.



7. A 【解析】由题易知 $f(x)$在 $x\in(0,+\infty)$上单调递增，且 $f(1)=0$，则由 $f(x)>0$，得 $x>1$，又因为 $f(x)$为偶函数，所以当 $x\in(-\infty,0)$时，$f(x)$单调递减，且有 $f(-1)=0$，则由 $f(x)>0$，得 $x<-1$，所以满足 $f(x)>0$ 的 x 的取值范围为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. 故选 A.

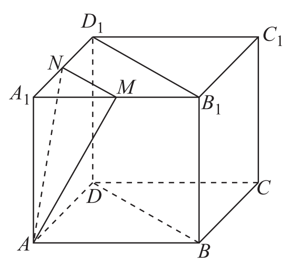
8. B 【解析】$\because f(0)=\sqrt{3}$，$\therefore \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又$\because |\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$，从而 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$. $\because f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{7\pi}{12}$对称，$\therefore \omega\times\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\omega=\frac{2}{7}+\frac{12}{7}k$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=1$，得 $\omega=2$. 故选 B.

9. D 【解析】$\because AB=6$ km，$BC=8$ km，$AC=10$ km，$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$，即三个村庄 A、B、C 所处的位置恰好位于一个直角三角形的三个顶点处. 要使点 M 到三个村庄 A、B、C 的距离都不小于 2 km，则点 M 位于如图阴影处，



$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$，$\therefore$ 所求概率 $P=1-\frac{\frac{1}{2}\times 2^2\times\pi}{24}=\frac{12-\pi}{12}$. 故选 D.

10. D 【解析】如图所示，取 A_1D_1 的中点 N，连接 MN，B_1D_1. 因为 M 为棱 A_1B_1 的中点，所以 $MN\parallel B_1D_1$，又在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BD\parallel B_1D_1$，所以异面直线 AM 与 BD 所成角的余弦值即为直线 AM 与 MN 所成角的余弦值. 连接 AN，则$\angle AMN$(或其补角)为异面直线 AM 与 BD 所成的角. 设正方体的棱长为 $2a$，则 $AM=\sqrt{5}a$，$AN=\sqrt{5}a$，$MN=\sqrt{2}a$. 在$\triangle AMN$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle AMN=\frac{5a^2+2a^2-5a^2}{2\times\sqrt{5}a\times\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，即异面直线 AM 与 BD 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$. 故选 D.



11. B 【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_2}$，$k_{PA}=\frac{y_1-2}{x_1-1}=\frac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{4}-1}=\frac{4}{y_1+2}$，同理 $k_{PB}=\frac{4}{y_2+2}$. 因为 $k_{PA}+k_{PB}=0$，所以 $\frac{4}{y_1+2}+\frac{4}{y_2+2}=0\Rightarrow y_1+y_2=-4$，所以 $k_{AB}=\frac{4}{-4}=-1$，又 $k_{OP}=\frac{2}{1}=2$，所以 $k_{AB}\cdot k_{OP}=-1\times2=-2$. 故选 B.

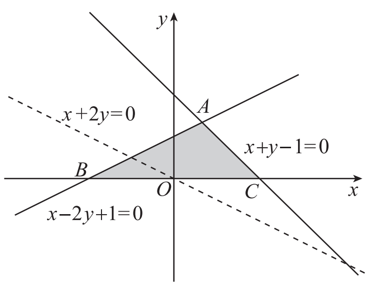
12. D 【解析】对任意的实数 $x>0$，$x\ln x-x-a\geqslant0$ 恒成立，即为 $a\leqslant x\ln x-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. 记 $f(x)=x\ln x-x$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x$，令 $\ln x=0$，得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，所以当 $x=1$ 时，$f(x)_{\min}=f(1)=-1$，所以 $a\leqslant-1$. 故选 D.

二、填空题

13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】由三角形的面积公式，得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin A=\frac{1}{2}\times1\times2\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14. ±1 【解析】由点到直线的距离公式，可知圆心 O 到直线的距离为 $d=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$，令 $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm1$.

15. $\frac{5}{3}$ 【解析】作出约束条件满足的可行域如图阴影部分所示，



目标函数 $z=x+2y$ 可化为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$. 将初始直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 进行平移，可得在点 A 处纵截距最大，即 z 最大. 联立 $\begin{cases}x-2y+1=0,\\x+y-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\y=\frac{2}{3},\end{cases}$ 即点 $A\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，所以 $z_{\max}=\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.

16. (22,20) 【解析】由题得，第一组的各数对的和为 3，第二组各数对的和为 4，第三组各数对的和为 5，第四组各数对的和为 6，…，第 n 组各数对的和为 $n+2$，且各个数对无重复数字，则第 40 组各数对的和为 42，且第 40 组第 21 个数对为(22,20).

三、解答题

17. **解**：(1)由 $S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，①

知当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$； (2 分)

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)$. ② (4 分)

①－②，得 $a_n=n$，且 $a_1=1$ 适合上式，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$. (6 分)

(2)由(1)可得，$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$， (8 分)

所以 $T_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. (12 分)

18. **解**：(1)由 $(0.005+0.010+0.025+a+0.020)\times10=1$，

解得 $a=0.040$. (2 分)

令中位数为 x，

则 $(0.005+0.010+0.025)\times10+0.040(x-80)=0.5$，

解得 $x=82.5$，

所以综合评分的中位数为 82.5. (5 分)

(2)由(1)与频率分布直方图可知，一等品的频率为 $(0.040+0.020)\times10=0.6$，即概率为 0.6，

所以 100 个产品中一等品有 60 个，非一等品有 40 个，

则一等品与非一等品的抽样比为 3∶2，

所以现抽取 5 个产品，则有 3 个一等品，记为 a,b,c，2 个非一等品，记为 d,e，

则从 5 个产品中抽取 2 个产品的所有情况为：(a,b)，(a,c)，(a,d)，(a,e)，(b,c)，(b,d)，(b,e)，(c,d)，(c,e)，(d,e)，共 10 种，

而这 2 个产品中恰有一个一等品的情况为：(a,d)，(a,e)，(b,d)，(b,e)，(c,d)，(c,e)，共 6 种.

记事件 A 为“从 5 个产品中抽取 2 个产品，这 2 个产品中恰有一个一等品”，

则 $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. (12 分)

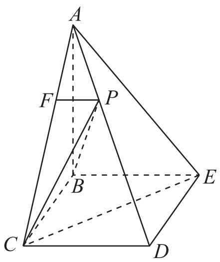
19. **解**：(1)因为底面 $BCDE$ 为正方形，且 $BC=2$，$AB=4$，$AC=AE=2\sqrt{5}$，

所以 $AC^2=AB^2+BC^2$，$AE^2=AB^2+BE^2$，

所以 $AB\perp BC,AB\perp BE$，

又 $BC\cap BE=B,BC\subset$平面 $BCDE,BE\subset$平面 $BCDE$，

所以 $AB\perp$平面 $BCDE$. (5 分)



(2)由(1)知，$AB\perp BE$，

又底面 $BCDE$ 为正方形，

所以 $BE\perp BC$，

又 $AB\cap BC=B$，所以 $BE\perp$平面 ABC.

过点 P 作 $PF\parallel CD$ 交 AC 于点 F.

因为 $CD\parallel BE$，

所以 $PF\parallel BE$，所以 $PF\perp$平面 ABC， (7 分)

所以 PF 为点 P 到平面 ABC 的距离.

由 $DP=2AP$，知 $PF=\frac{1}{3}CD=\frac{2}{3}$， (9 分)

所以 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times PF=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AB\times BC\times PF=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$. (12 分)

20. **解**：(1)当射线 OP 或 OQ 在 x 轴上时，显然有 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$； (1 分)

当射线 OP,OQ 不在 x 轴上时，设 $OP:y=kx$，$P(x_P,y_P)$，

联立方程 $\begin{cases}y=kx,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow(k^2a^2+b^2)x^2=a^2b^2\Rightarrow x_P^2=\frac{a^2b^2}{k^2a^2+b^2}$，

则 $y_P^2=\frac{k^2a^2b^2}{k^2a^2+b^2}$，

所以 $\frac{1}{|OP|^2}=\frac{k^2a^2+b^2}{(k^2+1)a^2b^2}$. (4 分)

用 $-\frac{1}{k}$ 代替上式中的 k，可得 $\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{a^2+k^2b^2}{(k^2+1)a^2b^2}$， (5 分)

所以 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{k^2a^2+b^2}{(k^2+1)a^2b^2}+\frac{a^2+k^2b^2}{(k^2+1)a^2b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

综上，$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 为定值. (6 分)

(2)由(1)的证明，可知 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$， (8 分)

即 $\frac{|OP|^2+|OQ|^2}{|OP|^2\cdot|OQ|^2}=\frac{7}{12}\Rightarrow\frac{|PQ|^2}{(|OP|\cdot|OQ|)^2}=\frac{7}{12}$， (10 分)

所以 $|OD|=\frac{|OP||OQ|}{|PQ|}=\sqrt{\frac{12}{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$. (12 分)

21. **解**：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=x^3+x^2-x$，

所以 $f'(x)=3x^2+2x-1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率 $k=f'(1)=4$，

又 $f(1)=1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=4(x-1)$，即 $y=4x-3$. (4 分)

(2)由 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x$，

得 $f'(x)=3x^2+2ax-a^2=3\left(x-\frac{a}{3}\right)(x+a)$.

当 $a=0$ 时，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

则 $f(x)_{\min}=f(0)=0>-11$，显然成立；

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x\in(-\infty,-a)\cup\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$；

由 $f'(x)<0$，得 $x\in\left(-a,\frac{a}{3}\right)$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-a,\frac{a}{3}\right)$ 上单调递减，在 $(-\infty,-a)$ 和 $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增. (5 分)

①当 $a\geqslant3$ 时，$\frac{a}{3}\geqslant1$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=1+a-a^2$，

所以对任意的 $x\in[0,1]$，都有 $f(x)\geqslant-11$ 等价于 $1+a-a^2\geqslant-11$，

即 $a^2-a-12\leqslant0$，

解得 $-3\leqslant a\leqslant4$，

又 $a\geqslant3$，所以 $3\leqslant a\leqslant4$； (8 分)

②当 $0<a<3$ 时，$0<\frac{a}{3}<1$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{a}{3}\right)=\left(\frac{a}{3}\right)^3+a\times\left(\frac{a}{3}\right)^2-a^2\times\frac{a}{3}=\frac{-5a^3}{27}$.

又当 $0<a<3$ 时，$\frac{-5a^3}{27}>-11$，显然成立. (11 分)

综上，实数 a 的取值范围为 $[0,4]$. (12 分)

22. **解**:(1)将$\begin{cases}x=1+t,\\y=2t\end{cases}$($t$ 为参数)中的参数 t 消去,得 $y=2x-2$,

所以直线 l 的普通方程为 $y=2x-2$. (2 分)

由 $\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0$,

得 $\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$,

即 $y^2=4x$,

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4x$. (5 分)

(2)方法一:联立方程$\begin{cases}y^2=4x,\\y=2x-2\end{cases}\Rightarrow x^2-3x+1=0$,$\Delta>0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=3$. (7 分)

因为直线 l 恰好过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点,

所以 $|AB|=x_1+x_2+2=5$. (10 分)

方法二:令 $t=\frac{\sqrt{5}}{5}t'$,则有$\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{5}}{5}t',\\y=\frac{2\sqrt{5}}{5}t'\end{cases}$($t'$为参数), (6 分)

将其代入方程 $y^2=4x$ 中,得 $\frac{4}{5}t'^2-\frac{4\sqrt{5}}{5}t'-4=0$,$\Delta>0$.

设点 A,B 对应的参数分别为 t'_1,t'_2,

则 $t'_1+t'_2=\sqrt{5}$,$t'_1\cdot t'_2=-5$, (8 分)

所以 $|AB|=|t'_1-t'_2|=\sqrt{(t'_1+t'_2)^2-4t'_1\cdot t'_2}=\sqrt{5+20}=5$. (10 分)

23. **解**:(1)由 $f(x)\leqslant 1$,得 $|2x+1|\leqslant 1$,

即 $-1\leqslant 2x+1\leqslant 1$,

解得 $-1\leqslant x\leqslant 0$,

所以原不等式的解集为$[-1,0]$. (4 分)

(2)$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x^2)\geqslant a|x|$恒成立,

即为 $\forall x\in\mathbf{R}$,$2x^2+1\geqslant a|x|$恒成立.

当 $x=0$ 时,$a\in\mathbf{R}$; (5 分)

当 $x\neq 0$ 时,$a\leqslant\frac{2x^2+1}{|x|}=2|x|+\frac{1}{|x|}$.

因为 $2|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2\sqrt{2}$$\left(当且仅当 2|x|=\frac{1}{|x|},即 |x|=\frac{\sqrt{2}}{2}时等号成立\right)$,

所以 $a\leqslant 2\sqrt{2}$.

综上,$a\leqslant 2\sqrt{2}$.

故实数 a 的最大值为 $2\sqrt{2}$. (10 分)