2020——2021学年

东北师大附中　高一年级数学科试卷

下学期期末考试

命题人：高一数学学科组

本试卷共3页，22小题，满分120分. 考试用时120分钟.

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码粘贴区.
2. 选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚.
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效.
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
5. 保持卡面清洁，不要折叠、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题4分，共32分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1．已知复数z满足$(\sqrt{3}-\mathrm{i})z=2$，则$z=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $\sqrt{3}+\mathrm{i}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $\sqrt{3}-\mathrm{i}$

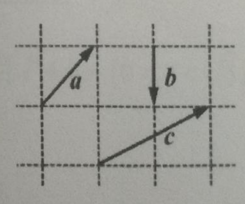
2．树人中学为了庆祝中国共产党建党100周年举办党史知识竞赛，在十二进六的半决赛中，12名参赛同学成绩各不相同，小明同学已经知道了自己的成绩，为了判断自己是否能进入决赛，他还需要知道12名同学成绩的

A．平均数　　B．中位数　　C．众数　　D．方差

3．在$\triangle ABC$中，角A, B, C所对的边分别为a, b, c，若$a=3$，$c=\sqrt{3}$，$B=\frac{\pi}{6}$，则$b=$

A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

4．向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$在正方形网格中的位置如图所示．若向量$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，则实数$\lambda=$



A．-2　　B．-1

C．1　　D．2

5．设平面α与平面β相交于直线m，直线a在平面α内，直线b在平面β内，且$b\perp m$，则“$\alpha\perp\beta$”是“$a\perp b$”的

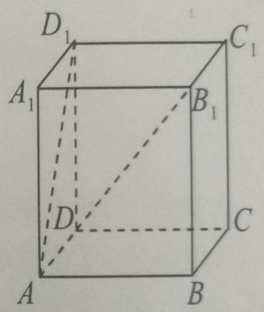
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．暑假期间，甲同学外出旅游的概率是$\frac{2}{3}$，乙同学外出旅游的概率是$\frac{3}{4}$，假定甲乙两人的行动相互之间没有影响，则暑假期间甲、乙两位同学恰有一人外出旅游的概率是

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{5}{12}$　　D．$\frac{1}{2}$

7．在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC=1, AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线AD_1与DB_1所成角的余弦值为



A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{6}$

C．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

8．设点G为$\triangle ABC$的重心，过G作一直线MN分别交边AB, AC于点M, N，若$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，则$x+4y$的最小值是

A．2　　B．3　　C．$\frac{10}{3}$　　D．$\frac{9}{2}$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题4分，共16分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得4分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9．下列命题是真命题的是

A．两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内

B．过空间中任意三点有且仅有一个平面

C．若空间两条直线不相交，则这两条直线平行

D．若直线$l\subset$平面α，直线$m\perp$平面α，则$m\perp l$

10．抛掷两枚质地均匀的骰子（标记为Ⅰ号和Ⅱ号），观察两枚骰子分别可能出现的基本结果：记 A = "Ⅰ号骰子出现点数为1"；B = "Ⅱ号骰子出现的点数为2"；C = "两个点数之和为8"；D = "两个点数之和为7"，则

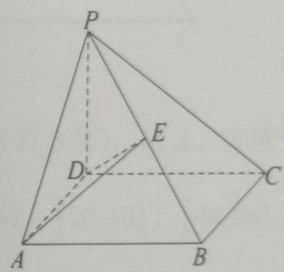
A. A 与 B 相互独立　　B. A 与 D 相互独立　　C. B 与 C 相互独立　　D. C 与 D 相互独立

11．在$\triangle ABC$中，角A, B, C所对的边分别为a, b, c，且$a:b:c=4:5:6$，则下列结论正确的是

A．$\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$　　B．$\triangle ABC$是钝角三角形

C．$\triangle ABC$的最大内角是最小内角的2倍　　D．若$c=6$，则$\triangle ABC$外接圆半径为$\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$

12．如图，四棱锥$P-ABCD$的底面为矩形，$PD\perp$平面$ABCD$，$AD=1$，$PD=AB=2$，点E是PB的中点，过A, D, E三点的平面α与平面PBC的交线为l，则



A. l // 平面 PAD

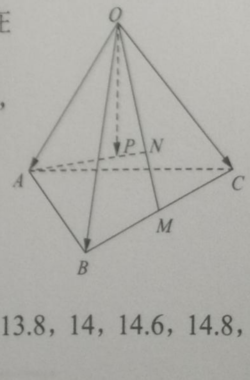
B. AE // 平面 PCD

C. 直线PA与l所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

D. 平面α截四棱锥$P-ABCD$所得的上，下两部分几何体的体积之比为$\dfrac{3}{5}$

三、填空题：本题共4小题，每小题4分，共16分.

13．如图，M是四面体$OABC$的棱BC的中点，点N在线段OM上，点P在线段AN上，且$MN=\dfrac{1}{2}ON$，$AP=\dfrac{3}{4}AN$，用向量$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$表示$\overrightarrow{OP}$，则$\overrightarrow{OP}=$__________.



14．某车间12名工人一天生产某产品(单位：kg)的数量分别为13，13.5，13.6，13.8，14，14.6，14.8，15，15.2，15.4，15.7，15.8，则所给数据的第75百分位数是__________.

15．已知动点P在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的表面上运动，且$PA=r\ (0<r<\sqrt{3})$，记点P的轨迹长度为$f(r)$，则$f(1)+f(\sqrt{2})=$__________.

16. 在锐角$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a,b,c，若$a=\sqrt{3}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，则b^2+c^2+3bc的取值范围是______________.

四、解答题：本题6小题，共56分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （本题满分8分）

已知$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$.

（1）当k为何值时，$k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$垂直？

（2）若$\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$，且$A,B,C$三点共线，求$m$的值.

18. （本题满分8分）

2021年起，部分省实行“3+1+2”高考新模式，为让学生适应新高考赋分模式，某校在一次模拟考试中，使用赋分制对选考化学的学生的化学成绩进行赋分，赋分的方案如下：先按照学生的原始分数从高到低排位，按比例划定A、B、C、D、E共五个等级，然后在相应区间内，利用转换公式进行赋分．等级排名占比与赋分区间如下表：

等级	A	B	C	D	E
等级排名占比	15%	35%	35%	13%	2%
赋分区间	[86, 100]	[71, 85]	[56, 70]	[41, 55]	[30, 40]

现从全年级选考化学的学生中随机抽取100名学生的原始成绩（未赋分）进行分析，其频率分布表为：

分组	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100]
频率	0.10	0.15	0.15	a	0.25	0.05

（1）求表中a的值；

（2）用样本估计总体的方法，估计该校本次化学成绩原始分不少于多少分才能达到赋分后的C等级以上（含C等级）？（结果保留整数）

（3）若采用样本量比例分配的分层随机抽样，从原始成绩在[40, 50)与[50, 60)内学生中抽取5人，查看他们的答题情况来分析知识点上缺漏，再从中选取2人进行调查分析，求这2人中恰好

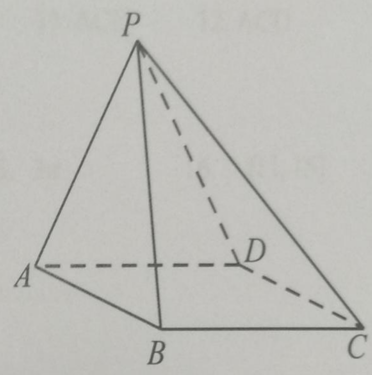
有 1 人原始成绩在[40, 50) 内的概率.

19.（本题满分 10 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60^\circ$，若 $PA=PD=\sqrt{5}$，$\cos\angle PAB=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.

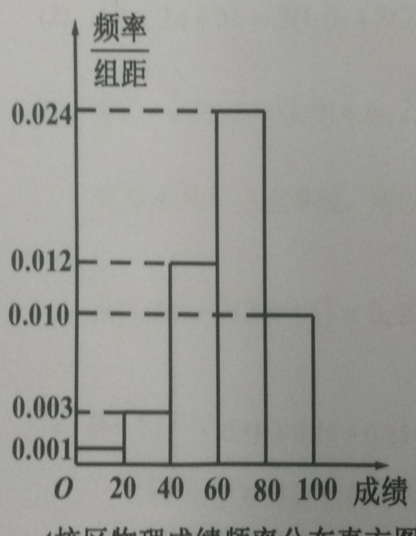
（1）证明：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求二面角 $B-PD-A$ 的正切值.

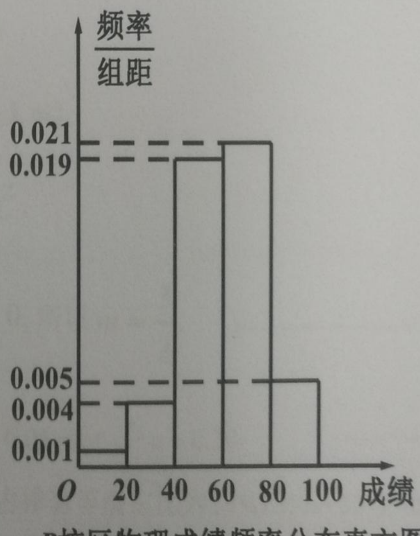


20（本题满分 10 分）

树人中学为了了解 A, B 两个校区高一年级学生期中考试的物理成绩（百分制），从 A，B 两个校区各随机抽取了 100 名学生的物理成绩，将收集到的数据按照 $[0, 20)$，$[20,40)$，$[40,60)$，$[60,80)$，$[80,100]$ 分组，绘制成成绩频率分布直方图如图：



A校区物理成绩频率分布直方图



B校区物理成绩频率分布直方图

（1）从 A 校区全体高一学生中随机选取一名，估计这名学生的成绩不低于 60 分的概率；

（2）如果把频率视为概率，从 A 校区全体高一学生中随机选取一名，从 B 校区全体高一学生中随

机选取两名，求这三名学生中至少有一名学生的成绩不低于 80 分的概率；

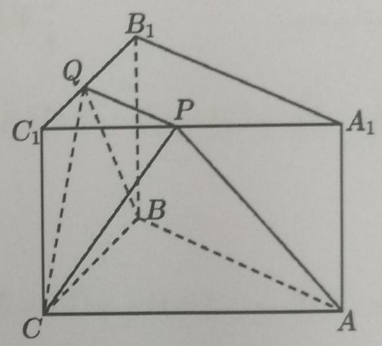
（3）根据频率分布直方图，用样本估计总体的方法，试比较 A, B 两个校区的物理成绩，写出两条统计结论，并说明理由.

21.（本题满分 10 分）

如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 2，高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，过 AB 的截面与上底面交于 PQ，且点 P 是棱 A_1C_1 的中点，点 Q 在棱 B_1C_1 上.

（1）试在棱 AC 上找一点 D，使得 $QD\,//$ 平面 ABB_1A_1，并加以证明；

（2）求四棱锥 $C-ABQP$ 的体积.



22.（本题满分 10 分）.

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c，且 $\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}=\frac{1}{\tan A}$.

（1）求 $\cos A$ 的最小值；

（2）记 $\triangle ABC$ 的面积为 S，点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\theta$，证明：

①$\tan A=\frac{4S}{b^2+c^2-a^2}$；②$\tan A=2\tan\theta$.

东北师大附中 2020-2021 学年下学期期末考试

高一数学参考答案及评分标准

选择题

1. A　　2. B　　3. C　　4. D　　5. A　　6. C

7. C　　8. B　　9. AD　　10. AB　　11. ACD　　12. ACD

填空题

13. $\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$　　14. 15.3　　15. 3π　　16. $(11,15]$

解答题

17. 解：(1) $k\vec{a}-\vec{b}=k(1,0)-(2,1)=(k-2,-1)$,

$\vec{a}+2\vec{b}=(1,0)+2(2,1)=(5,2)$.

因为$k\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}+2\vec{b}$垂直，所以$5(k-2)+(-1)\times 2=0$,

即$5k-10-2=0$, 得$k=\frac{12}{5}$. ……………………4 分

(2) $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}+3\vec{b}=2(1,0)+3(2,1)=(8,3)$,

$\overrightarrow{BC}=\vec{a}+m\vec{b}=(1,0)+m(2,1)=(2m+1,m)$.

因为A,B,C三点共线，所以$\overrightarrow{AB}\ /\!/\ \overrightarrow{BC}$.

所以$8m-3(2m+1)=0$, 即$2m-3=0$, 所以$m=\frac{3}{2}$. ……………………8 分

18. 解：（1）$\because 0.10+0.15+0.15+a+0.25+0.05=1$，$\therefore a=0.30$. ……………………1 分

（2）由已知等级达到 C 级及以上所占排名等级占比为15%+35%+35%=85%

设原始分数不少于 x 分可以达到赋分后的 C 级及以上，易得 $50<x<60$

所以，$x=50+\frac{0.15-0.10}{0.25-0.10}\times 10\approx 53.33$

所以估计该校本次化学成绩原始分不少于 54 分才能达到赋分后的 C 等级以上（含 C 等级）...4

分

（3）设 A =“抽取 2 人中恰好有 1 人原始成绩在 $[40, 50)$ 内”

由题设可知，原始得分在 $[40, 50)$ 和 $[50, 60)$ 内频率分别为 0.10 和 0.15

则抽取的 5 人中，得分在 $[40, 50)$ 内的有 2 人，得分在 $[50, 60)$ 的有 3 人.

记得分在 $[40, 50)$ 内 2 位同学为 a，b，得分在 $[50, 60)$ 的有 3 位同学为 B, C, D.

则从 5 人中任取 2 人，样本空间为

$\Omega=\{(a, b), (a, B),(a, C),(a, D),(b, B),(b, C),(b, D),(B, C),(B, D),(C, D)\}$,共包含 10 个样本点

$M=\{(a, B),(a, C),(a, D),(b, B),(b, C),(b, D)\}$，共包含 6 个样本点,

所以，$P(M)=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

故这 2 人中恰好有 1 人原始成绩在 $[40, 50)$ 内的概率 $\dfrac{3}{5}$. ....8 分

19.（1）证明：取 AD 中点 O，连结 PO,BO,BD，在 ΔPAD 中，$PA=PD=\sqrt{5}$，$AD=2$，

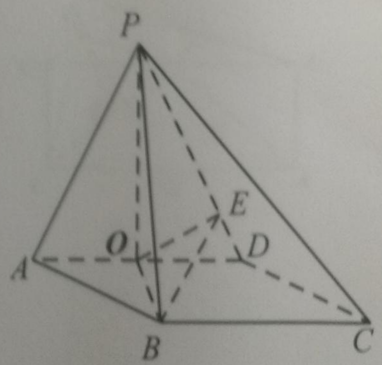
则 $PO\perp AD$，$PO=\sqrt{PA^2-AO^2}=\sqrt{5-1}=2$.

在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^\circ$，$AB=AD=2$，$\therefore AB=AD=BD=2$，$\therefore BO\perp AD$，

且 $BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

在 ΔPAB 中，$\cos\angle PAB=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$，

$\therefore PB^2=PA^2+AB^2-2PA\cdot AB\cdot\cos\angle PAB=5+4-2\times\sqrt{5}\times2\times\dfrac{\sqrt{5}}{10}=7$.



在 ΔPOB 中，$OB^2+PO^2=3+4=7=PB^2$，

$\therefore PO\perp BO$，且 $AD\cap BO=O$

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$.又 $PO\subset$ 平面 PAD

$\therefore$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. ....5 分

（2）由（1）知平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

且平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，且 $BO\perp AD$，

$\therefore BO\perp$ 平面 $ABCD$，作 $OE\perp PD$ 于 E，由三垂线定理，得 $BE\perp PD$.

$\therefore \angle BEO$ 就是二面角 $B-PD-A$ 的平面角，

在 $\mathrm{Rt}\Delta POD$ 中，$OE \perp PD$，有 $PD \cdot OE = PO \cdot OD$，

即 $\sqrt{5} \cdot OE = 2 \times 1$，$\therefore OE = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

在 $\mathrm{Rt}\Delta BOE$ 中，$\tan \angle BEO = \dfrac{OB}{OE} = \dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{2}{\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

$\therefore$ 二面角 $B-PD-A$ 的正切值是 $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$. ....10 分

20. 解：(1) 从 A 校区抽取的 100 名学生中随机选取一名，

这名学生的成绩不低于 60 分的频率为 $(0.024+0.010)\times 20 = 0.68$，

利用频率估计概率可得这名学生的成绩不低于 60 分的概率为 0.68； ....2 分

（2）由频率分布图可得 A 校区随机选取一名学生，物理成绩不低于 80 分的概率约为 $0.010 \times 20 = 0.20$，

B 校区随机选取一名学生，物理成绩不低于 80 分的概率约为 $0.005 \times 20 = 0.10$，

则这三名学生物理成绩都低于 80 分的概率约为 $0.80 \times 0.90 \times 0.90 = 0.648$，

这三名学生中至少有一名学生成绩都不低于 80 分的概率为 $1-0.648 = 0.352$， ....5 分

（3）①从众数看，A, B 两个校区的众数都是 70，所以 A, B 两个校区的众数相等.

②从中位数看，A 校区物理成绩的中位数高于 B 校区物理成绩的中位数

A 校区的中位数是 $60 + \dfrac{0.50-0.32}{0.80-0.32} \times 20 = 67.5$

B 校区的中位数是 $60 + \dfrac{0.50-0.48}{0.90-0.48} \times 20 \approx 61.0$

因为 $67.5 > 61.0$，所以，A 校区物理成绩的中位数高于 B 校区物理成绩的中位数.

③从平均数看，A 校区物理成绩的平均数高于 B 校区物理成绩的平均数

A 校区成绩平均数为

$\mu_1 = 10\times0.001\times20+30\times0.003\times20+50\times0.012\times20+70\times0.024\times20$

$+90\times0.010\times20=65.6$，

B 校区成绩平均数为，

$\mu_2 = 10\times0.001\times20+30\times0.004\times20+50\times0.019\times20+70\times0.021\times20$

$+90\times0.005\times20=60.0$，

$\mu_1 > \mu_2$，所以，A 校区物理成绩的平均数高于 B 校区物理成绩的平均数.

④从方差看，B 校区物理成绩比 A 校区物理成绩更集中.

A 校区成绩方差为：$S_A^2 = (10-65.6)^2\times0.02+(30-65.6)^2\times0.06+(50-65.6)^2\times0.24+$

$(70-65.6)^2\times0.48+(90-65.6)^2\times0.20=324.64$

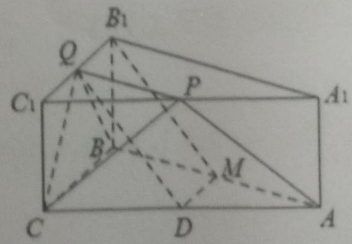
B 校区成绩方差为：$S_B^2 = (10-60)^2\times0.02+(30-60)^2\times0.08+(50-60)^2\times0.38+$

$(70-60)^2\times0.42+(90-60)^2\times0.10=292$

因为 $S_A^2 > S_B^2$，所以 B 校区物理成绩比 A 校区物理成绩更集中.　......................10 分

21.（1）证法 1：（1）点 D 为棱 AC 的中点，证明如下：

取 AB 的中点 M，连接 DM，B_1M.



$\because AB // A_1B_1$，$AB \subset$ 平面 $ABQP$，$A_1B_1 \not\subset$ 平面 $ABQP$，

$\therefore A_1B_1 //$ 平面 $ABQP$，$\because A_1B_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，

平面 $ABQP \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = PQ$，$\therefore PQ // A_1B_1$.

又 P 是棱 A_1C_1 的中点，$\therefore Q$ 是棱 B_1C_1 的中点，$\therefore QB_1 \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}BC$.

$\because D$, M 分别为棱 AC, AB 的中点，$\therefore DM \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}BC$，$\therefore QB_1 \underline{\underline{//}} DM$，

$\therefore$四边形DMB_1Q是平行四边形，$\therefore QD // B_1M$，

$\because B_1M \subset$平面ABB_1A_1，$QD \not\subset$平面ABB_1A_1，$\therefore QD //$平面ABB_1A_1.

证法2：D为AC的中点时，$QD //$平面ABB_1A_1.

证明如下：

$\because AB //$平面$A_1B_1C_1$，$AB \subset$平面$ABQP$，

平面$ABQP \cap$平面$A_1B_1C_1 = PQ$，

$\therefore PQ // AB$，$PQ \not\subset$平面ABB_1A_1，$AB \subset$平面ABB_1A_1，所以$PQ //$平面ABB_1A_1，

又$\because$ D为AC的中点，P为A_1C_1的中点，$\therefore PDAA_1$是平行四边形，$\therefore PD // AA_1$，

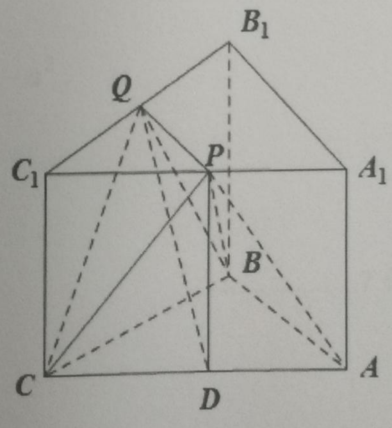
又$\because PD \not\subset$平面ABB_1A_1，$AA_1 \subset$平面ABB_1A_1，$\therefore PD //$面ABB_1A_1，

又$\because PD$与PQ在平面PDQ内相交，$\therefore$面$PDQ //$面ABB_1A_1，

又$\because QD \subset$面PDQ，$\therefore DQ //$平面ABB_1A_1 ....5分

（2）解法一：连接BP，四棱锥$C-ABQP$可视为三棱锥$C-BPQ$和$C-ABP$组合而成，

三棱锥$C-ABP$可视为$P-ABC$，底面积



$S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}$，高为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

设$V_{C-BAP} = V_1$，

体积为$V_1 = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

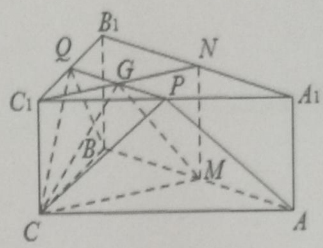
三棱锥$C-BPQ$与$C-ABP$等高，体积比为底面积之比，

设$V_{C-BPQ} = V_2$，

则$V_2 : V_1 = S_{\triangle BPQ} : S_{\triangle BAP} = PQ : AB = 1:2$，故$V_2 = \dfrac{1}{2}V_1 = \dfrac{1}{4}$，

因此，$V_{C-ABPQ}=V_1+V_2=\frac{3}{4}$，即为所求．．　　　　　　　　　　……………………10分

解法二：分别取AB和A_1B_1的中点M，N，连接MN, CM，连接C_1N交PQ于点G，连接MG, CG．



$\because \triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$是正三角形，且M，N分别是AB和A_1B_1的中点，

$\therefore CM\perp AB$，且$CM \underline{\underline{//}} C_1N$，则$C, M, N, C_1$四点共面．

$\because CC_1\perp$平面ABC，$AB\subset$平面ABC，$\therefore CC_1\perp AB$，

又$CM\subset$平面$CMNC_1$，$CC_1\subset$平面$CMNC_1$，$CM\cap CC_1=C$，$\therefore AB\perp$平面$CMNC_1$，

$\because AB\subset$平面$ABQP$，$\therefore$平面$ABQP\perp$平面$CMNC_1$．

在矩形$CMNC_1$中，$MN=CC_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$C_1N=CM=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$，

$\therefore C_1G=NG=CC_1=MN$，$\therefore \angle C_1GC=\angle NGM=45^\circ$，且$CG=\sqrt{2}CC_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore \angle CGM=90^\circ$，即$CG\perp MG$．又平面$ABQP\perp$平面$CMNC_1$，

平面$ABQP\cap$平面$CMNC_1=MG$，$CG\subset$平面$CMNC_1$，$\therefore CG\perp$平面$ABQP$．

在等腰梯形$ABQP$中，$PQ=\frac{1}{2}A_1B_1=1$，$AB=2$，$BQ=AP=\sqrt{AA_1^{\,2}+A_1P^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

$\therefore$等腰梯形$ABQP$的高$h=\sqrt{AP^2-(\frac{AB-PQ}{2})^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore$四棱锥$C-ABQP$的体积$V=\frac{1}{3}CG\cdot S_{梯形ABQP}=\frac{1}{3}CG\times\frac{1}{2}(PQ+AB)\times h$

$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{1}{2}(1+2)\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3}{4}$.

22. 解：（1）因为$\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}=\frac{1}{\tan A}$，所以$\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\cos A}{\sin A}$，

所以$\cos A=\sin A\frac{\cos B\sin C+\sin B\cos C}{\sin B\sin C}=\frac{\sin^2 A}{\sin B\sin C}$，

由正弦定理可得$\cos A=\frac{a^2}{bc}$，

而由余弦定理得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2}{bc}$，

所以$\boxed{3a^2=b^2+c^2.}$

因为$\cos A=\frac{b^2+c^2-\frac{b^2+c^2}{3}}{2bc}=\frac{b^2+c^2}{3bc}\geq\frac{2}{3}$，当且仅当$b=c$时，等号成立，

所以$\cos A$的最小值为$\frac{2}{3}$.　　......................5分

（2）证明：设$PA=x, PB=y, PC=z$，　$\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCA$的面积分别为$S_1$，$S_2$，$S_3$，

①因为$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，所以$2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$，

而$S=\frac{1}{2}bc\sin A$，

所以$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2bc\sin A}{2bc\cos A}=\frac{4S}{b^2+c^2-a^2}$.　　......................7分

②由（1）中可得$3a^2=b^2+c^2$，

所以$\tan A=\frac{4S}{b^2+c^2-a^2}=\frac{2S}{a^2}$，

在$\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCA$中，同理可得：

$\tan\theta=\frac{4S_1}{c^2+x^2-y^2}=\frac{4S_2}{a^2+y^2-z^2}=\frac{4S_3}{b^2+z^2-x^2}$，

所以 $4S_1=\left(c^2+x^2-y^2\right)\tan\theta$，$4S_2=\left(a^2+y^2-z^2\right)\tan\theta$，$4S_3=\left(b^2+z^2-x^2\right)\tan\theta$，

所以 $4S=4\left(S_1+S_2+S_3\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)\tan\theta=4a^2\tan\theta$，

即 $\tan\theta=\dfrac{S}{a^2}$，

……………………10分

所以 $\tan A=2\tan\theta$.