成都七中高 2023 届三诊模拟考试数学（理科）

一.选择题（本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请将选项填涂在答题卡上）

1．已知集合 $A=\{x||x-3|<2\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x+1}{x-2}\le 0\right.\right\}$，则 $A\cup B=$（　）

A．$(1,2]$　　B．$(1,2)$　　C．$[-1,5]$　　D．$[-1,5)$

2．已知复数 z 满足 $(2+3i)z=1+i$（i 为虚数单位），则在复平面内复数 z 对应的点位于（　　）

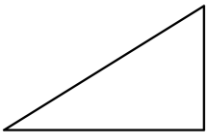
A．第四象限　　B．第三象限　　C．第二象限　　D．第一象限

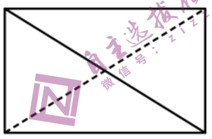
3．命题“有一个偶数是素数”的否定是（　）

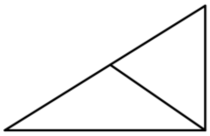
A．任意一个奇数是素数　　B．任意一个偶数都不是素数

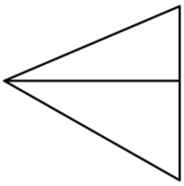
C．存在一个奇数不是素数　　D．存在一个偶数不是素数

4．三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 为直角三角形，ΔABC 的外接圆为圆 O，$PQ\perp$ 底面 ABC，Q 在圆 O 上或内部，现将三棱锥的底面 ABC 放置在水平面上，则三棱锥 $P-ABC$ 的俯视图不可能是（　）

A．

B．

C．

D．

5．已知函数 $f(x)=\begin{cases} f(x+1), x\le 0 \\ x^2-3x-4, x>0 \end{cases}$，则 $f\left(f\left(-4\right)\right)=$（　）

A．-6　　B．0　　C．4　　D．6

6．已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} 2x+y-2\ge 0 \\ x-2y-2\le 0 \\ y\le 1 \end{cases}$，则 $\frac{x+y}{x}$ 的最大值是（　）

A．2　　B．$\frac{8}{3}$　　C．3　　D．4

7．中国古代许多著名数学家对推导高阶等差数列的求和公式很感兴趣，创造并发展了名为“垛积术”的算法，展现了聪明才智.南宋数学家杨辉在《详解九章算法》和《算法通变本末》中，所讨论的二阶等差数列与一般等差数列不同，前后两项之差并不相等，但是后项减前项之差组成的新数列是等差数列.现有一个“堆垛”，共 50 层，第一层 2 个小球，第二层 5 个小球，第三层 10 个小球，第四层 17 个小球，…，按此规律，则第 50 层小球的个数为（　）

A．2400　　B．2401　　C．2500　　D．2501

8．瑞士数学家欧拉发现了复指数函数和三角函数的关系，并写出以下公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$（$x\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位），这个公式在复变论中占有非常重要的地位，被誉为“数学中的天桥”．根据此公式，下面四个结果中**不成立**的是（　　）

A．$e^{i\pi}+1=0$　　B．$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2022}=1$

C．$\left|e^{ix}+e^{-ix}\right|\le 2$　　D．$-2\le e^{ix}-e^{-ix}\le 2$

9．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对任意的 $x\in D$，都存在 $x_0\in D$，使得 $x+f(x_0)=1$，则“$f(x)$ 存在零点”是“$1\in D$”的（　）

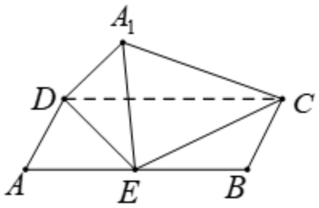
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分且必要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F_1，直线 $y=kx(k>0)$ 与双曲线 C 交于 P,Q 两点，且 $\angle PF_1Q=\dfrac{2\pi}{3}$，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{F_1Q}=4$，则当 $\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{b^2}{a^2}$ 取得最小值时，双曲线 C 的离心率为（　）

A．3　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

11．如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2\sqrt{2}$，E 为边 AB 的中点，将 ΔADE 沿直线 DE 翻折成 $\triangle A_1DE$．在翻折过程中，直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值最大为（　）



A．$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　B．$\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

12．函数 $g(x)$ 与其导函数为 $g'(x)$，满足 $(x+\dfrac{1}{x})\cdot g'(x)<(1-\dfrac{1}{x^2})\cdot g(x)$，其中 $x>0$；若 $m=\tan\theta$，$n=\sin\theta+\cos\theta$，其中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，则下列不等式一定成立的有（　）个

① $g(1)-g(m)<0$；　　② $g(1)-(n^2-1)g(m)>0$

③ $(\sin 2\theta+2)g(1)-2ng(n)>0$　　④ $(n^4-1)g(m)-2ng(n)<0$：

A 1　　B 2　　C 3　　D 4

二．填空题（本题共 **4** 个小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分，请将答案填在答题卡指定横线上）

13．已知 $\vec{a}=(4,2)$，$\vec{b}=(-1,1)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为__________．

14．2023 年五一节到来之前，某市物价部门对本市 5 家商场的某种商品一天的销售量及其价格进行调查，5 家商场这种商品的售价 x（单位：元）与销售量 y（单位：件）之间的一组数据如下表所示：

价格 x	8	9.5	m	10.5	12
销售量 y	16	10	8	6	5

经分析知，销售量 y 件与价格 x 元之间有较强的线性关系，其线性回归直线方程为 $\hat{y}=-3.5x+44$，则 $m=$__________．

15．在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{n+1}^2+a_n^2+1=2(a_{n+1}a_n+a_{n+1}+a_n)$，且 $a_1=1$，$\{a_n\}$ 递增，则 $a_n=$_______．

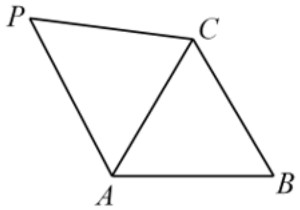
16．抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 的方程为：$x=ty+7$，l 交抛物线于 M，N 两点，且 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{NF}=0$，抛物线在 M，N 处的切线交于点 P，则 ΔPMN 的面积为______．

三. 解答题（本大题共 7 小题，17-21 题各 12 分，22 或 23 题 10 分. 解答过程应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请作答在答题卡上）

17．如图，ΔABC 是边长为 2 的正三角形，P 在平面上且满足 $CP=CA$，记 $\angle CAP=\theta$．

(1)若 $\theta=\frac{\pi}{3}$，求 PB 的长；

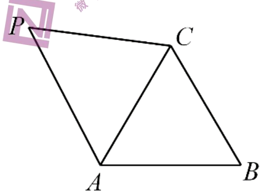
(2)用 θ 表示 $S_{\Delta PAB}$，并求 $S_{\Delta PAB}$ 的取值范围.

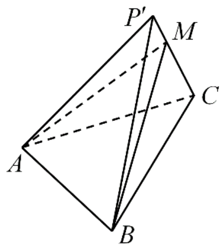


18．平面图形同 17 题. ΔABC 是边长为 2 的正三角形，P 在平面上满足 $CP=CA$，将 ΔACP 沿 AC 翻折，使点 P 到达 P' 的位置，若平面 $P'BC\perp$ 平面 ABC，且 $BC\perp P'A$.

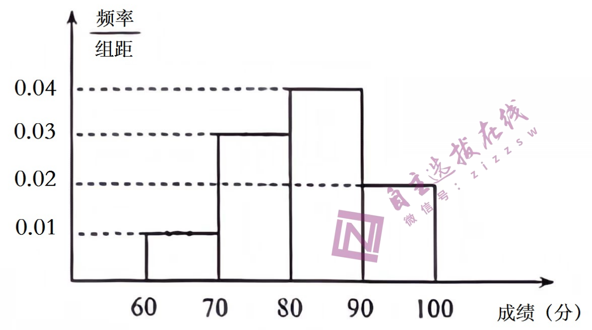
(1)作平面 α，使得 $AP'\subset\alpha$，且 $BC\perp\alpha$，说明作图方法并证明；

(2)点 M 满足 $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{P'M}$，求二面角 $P'-AB-M$ 的余弦值.





19．2023 年 4 月 12 日是成都七中 118 周年校庆. 为了纪念这一特殊的日子，两校区学生会在全校学生中开展了校庆知识测试（满分 100 分），随机抽取了 100 名学生的测试成绩，按照 $[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$ 分组，得到如下所示的样本频率分布直方图：



(1)根据频率分布直方图，估计该校学生测试成绩的中位数；

(2)用样本的频率估计概率，从该校所有学生中随机抽取 10 名学生的成绩，用 $P(X=k)$ 表示这 10 名学生中恰有 k 名学生的成绩在 $[90,100]$ 上的概率，求 $P(X=k)$ 取最大值时对应的 k 的值；

(3)从测试成绩在 $[90,100]$ 的同学中再次选拔进入复赛的选手，一共有 6 道题，从中随机挑选出 4 道题进行测试，至少答对 3 道题者才可以进入复赛．现有甲、乙两人参加选拔，在这 6 道题中甲能答对 4 道，乙能答对 3 道，且甲、乙两人各题是否答对相互独立．记甲、乙两人中进入复赛的人数为 ξ，求 ξ 的分布列及期望.

自主选拔在线 微信号：zizzsw

20．已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1,F_2$为$C$的左右焦点.点$P$（1，$-\dfrac{3}{2}$）为椭圆上一点，且$|PF_1|+|PF_2|=4$.作$P$作两直线与椭圆$C$相交于相异的两点$A$，$B$，直线$PA$、$PB$的倾斜角互补，直线$AB$与$x$，$y$轴正半轴相交.

(1)求椭圆C的方程;

(2) 点M满足$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$,求$M$的轨迹方程.

21.已知函数$f\left(x\right)=\cos x+\dfrac{a}{2}x^2-1$，$a\in R$.

（1）若$x=0$是函数$f\left(x\right)$唯一的极小值点，求实数a的取值范围;

（2）证明：$\sqrt{\sin^3\dfrac{1}{2}}+\sqrt{\sin^3\dfrac{2}{4}}+\sqrt{\sin^3\dfrac{3}{8}}+\ldots+\sqrt{\sin^3\dfrac{2023}{2^{2023}}}<2$.

请考生在第22、23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一个题目计分. 请考生用2B铅笔将答题卡上所做题目的题号涂黑.

22．在平面直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=1+\dfrac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha},\\ y=\dfrac{\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\end{cases}$（$\alpha$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线$l$的极坐标方程为$\theta=\dfrac{\pi}{6}\left(\rho\in \mathrm{R}\right)$.

(1)求C的普通方程与l的直角坐标方程;

(2)求l与C交点的极坐标.

23．已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}|x-a|\left(a\in R\right)$.

（1）当$a=2$时，解不等式$\left|x-\dfrac{1}{3}\right|+f\left(x\right)\geq 1$；

（2）设不等式$\left|x-\dfrac{1}{3}\right|+f\left(x\right)\leq x$的解集为$M$，若$\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]\subseteq M$，求实数$a$的取值范围.