

### 高三数学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡指定位置上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{(x, y) | y = x^2\}$ ,  $B = \{(x, y) | y = x + 2\}$ , 则  $A \cap B = ( \quad )$

- A.  $\{1, 4\}$                   B.  $[0, +\infty)$                   C.  $\{-1, 2\}$                   D.  $\{(-1, 1), (2, 4)\}$

2. 已知复数  $z$  是纯虚数,  $\frac{1+z}{1-i}$  是实数, 则  $\bar{z} = ( \quad )$

- A.  $-i$                   B.  $i$                   C.  $-2i$                   D.  $2i$

3. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_3 = -7$ ,  $S_6 = -63$ , 则公比  $q = ( \quad )$

- A.  $-2$                   B.  $2$                   C.  $-\frac{1}{2}$                   D.  $\frac{1}{2}$

4. 已知向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ , 且  $\vec{a} - \vec{b}$  在  $\vec{a}$  上的投影的数量为  $2 + \sqrt{3}$ , 则  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = ( \quad )$

- A.  $\frac{\pi}{6}$                   B.  $\frac{\pi}{3}$                   C.  $\frac{2\pi}{3}$                   D.  $\frac{5\pi}{6}$

5.  $\frac{\cos 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} - 2 \cos 10^\circ = ( \quad )$

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                   B.  $\sqrt{2}$                   C.  $\sqrt{3}$                   D.  $2$

6. 《史记》卷六十五《孙子吴起列传第五》中有这样一道题: 齐王与田忌赛马, 田忌的上等马优于齐王的中等马, 劣于齐王的上等马; 田忌的中等马优于齐王的下等马, 劣于齐王的中等马; 田忌的下等马劣于齐王的下等马. 现两人进行赛马比赛, 比赛规则为: 每匹马只能用一次, 每场比赛双方各出一匹马, 共比赛三场. 每场比赛中胜者得 1 分, 否则得 0 分. 若每场比赛之前彼此不知道对方所用之马, 则比赛结束时, 齐王得 2 分的概率为  $( \quad )$

- A.  $\frac{1}{6}$                   B.  $\frac{1}{3}$                   C.  $\frac{2}{3}$                   D.  $\frac{5}{6}$

7. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 上顶点为  $B$ , 直线  $BF$  与  $C$  相交于另一点  $A$ , 点  $A$  在  $x$

轴上的射影为  $A_1$ ,  $O$  为坐标原点, 若  $\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{A_1A}$ , 则  $C$  的离心率为  $( \quad )$

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_5 = \frac{3\pi}{8}$ , 设函数  $f(x) = \left(4\cos^2 \frac{x}{2} - 2\right) \sin x + \cos 2x + 2$ , 记  $y_n = f(a_n)$ , 则数列  $\{y_n\}$  的前 9 项和为 ( )

- A. 0      B. 10      C. 16      D. 18

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 甲袋中装有 4 个白球, 2 个红球和 2 个黑球, 乙袋中装有 3 个白球, 3 个红球和 2 个黑球. 先从甲袋中随机取出一球放入乙袋, 再从乙袋中随机取出一球. 用  $A_1, A_2, A_3$  分别表示甲袋取出的球是白球、红球和黑球, 用  $B$  表示乙袋取出的球是白球, 则 ( )

- A.  $A_1, A_2, A_3$  两两互斥      B.  $P(B|A_2) = \frac{1}{3}$   
C.  $A_3$  与  $B$  是相互独立事件      D.  $P(B) = \frac{1}{3}$

10. 已知函数  $f(x) = |\sin x| \cos x + 1$ , 则 ( )

- A.  $f(x)$  为周期函数      B.  $f(x)$  在  $\left(-\pi, -\frac{3}{4}\pi\right)$  上单调递增  
C.  $f(x)$  的值域为  $[0, 1]$       D.  $y = f(x)$  的图像关于直线  $x = 3\pi$  对称

11. 已知棱长为 2 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 过  $BD_1$  的平面  $\alpha$  交棱  $AA_1$  于点  $E$ , 交棱  $CC_1$  于点  $F$ , 则 ( )

- A.  $\overline{BF} = \overline{ED_1}$       B. 存在  $E, F$ , 使得  $EF \perp$  平面  $DBB_1D_1$   
C. 四边形  $BFD_1E$  面积的最大值为  $2\sqrt{6}$       D. 平面  $\alpha$  分正方体所得两部分的体积相等

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 1 - |x + 1|, & x < 0 \\ f(x - 2), & x \geq 0 \end{cases}$ , 则 ( )

- A.  $f(-4) + f(2021) = 0$   
B.  $f(\log_3 6) < f(\log_5 10) < f(\log_6 12)$   
C. 若函数  $g(x) = f(x) - kx - 1$  恰有 3 个零点, 则  $k \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$   
D. 当  $x \in \left(2k - \frac{3}{2}, 2k - \frac{1}{2}\right) (k \in \mathbf{N})$  时,  $f(x) > \frac{1}{2}$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在  $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$  的展开式中, 只有第 4 项的二项式系数最大, 则展开式中含  $x^3$  项的系数为\_\_\_\_\_.

14. 已知抛物线  $C_1: y^2 = 8x$ , 圆  $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ , 点  $M(1, 1)$ , 若  $A, B$  分别是  $C_1, C_2$  上的动点, 则  $|AM| + |AB|$  的最小值为\_\_\_\_\_.

15. 已知函数  $f(x) = x(e^x + 1)$ ,  $g(x) = (x+1)\ln x$ , 若  $f(x_1) = g(x_2) = m (m > 1)$ , 则  $\frac{x_1 + x_2}{\ln m}$  点的最小值为\_\_\_\_\_.

16. 在三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $AC \perp CB$ ,  $PA = AC = BC = 4$ . 以  $A$  为球心, 表面积为  $36\pi$  的球面与侧面  $PBC$  的交线长为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在  $ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $B = 60^\circ$ ,  $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ , 延长  $BC$  至  $D$ , 使  $BD = 7$ ,

$\triangle ACD$  的面积为  $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ .

(I) 求  $AB$  的长;

(II) 求  $\triangle ACD$  外接圆的面积.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{2}{a_3 - a_2} + \frac{3}{a_4 - a_3} + \dots + \frac{n}{a_{n+1} - a_n} = 2^{n+1} - 2$ .

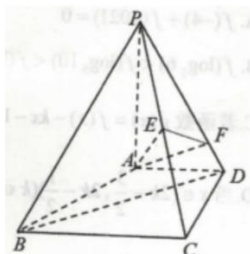
(I) 设  $b_n = a_{n+1} - a_n$ , 求  $\{b_n\}$  的通项公式;

(II) 若  $a_1 = 2$ , 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

19. (本小题满分12分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AD \perp DC$ ,  $BC = 2AD = 2CD = \frac{4}{3}AP = 4$ ,

$E$  为  $PC$  的中点, 点  $F$  在  $PD$  上且  $PF = 3FD$ .



- (I) 求证:  $BD \parallel$  平面  $AEF$ ;  
(II) 求二面角  $E-AF-D$  的余弦值.

20. (本小题满分12分)

学习强国中有两项竞赛答题活动, 一项为“双人对战”, 另一项为“四人赛”. 活动规则如下: 一天内参与“双人对战”活动, 仅首局比赛可获得积分, 获胜得2分, 失败得1分; 一天内参与“四人赛”活动, 仅前两局比赛可获得积分, 首局获胜得3分, 次局获胜得2分, 失败均得1分. 已知李明参加“双人对战”活动时, 每局比赛获胜的概率为  $\frac{1}{2}$ ; 参加“四人赛”活动(每天两局)时, 第一局和第二局比赛获胜的概率分别为  $p, \frac{1}{3}$ . 李明周一到周五每天都参加了“双人对战”活动和“四人赛”活动(每天两局), 各局比赛互不影响.

- (I) 求李明这5天参加“双人对战”活动的总得分  $X$  的分布列和数学期望;  
(II) 设李明在这5天的“四人赛”活动(每天两局)中, 恰有3天每天得分不低于3分的概率为  $f(p)$ . 求  $p$  为何值时,  $f(p)$  取得最大值.

21. (本小题满分12分)

已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左焦点为  $F$ , 右顶点为  $A$ , 渐近线方程为  $y = \pm\sqrt{3}x$ ,  $F$  到渐近线的距离为  $\sqrt{3}$ .

(I) 求  $C$  的方程;

(II) 若直线  $l$  过  $F$ , 且与  $C$  交于  $P, Q$  两点 (异于  $C$  的两个顶点), 直线  $x=t$  与直线  $AP, AQ$  的交点分别为  $M, N$ . 是否存在实数  $t$ , 使得  $|\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{FN}| = |\overrightarrow{FM} - \overrightarrow{FN}|$ ? 若存在, 求出  $t$  的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分12分)

已知函数  $f(x) = e^x(x^2 + ax + 1 - a)$ .

(I) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(II) 当  $a=1$  时, 若  $f(m) > f(z) = 1$ , 试比较  $\ln mn + ze^z, \ln mz + ne^n, \ln nz + me^m$  的大小, 并说明理由.

## 关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索