第五届陈省身杯全国高中数学奥林匹克解答

1. 联结 AO、AH.

因为 A、B_1、H、C_1 四点共圆，且 $OH/\!/B_1C_1$，所以，

$\angle OHC_1=\angle HC_1B_1=\angle HAB_1$

$=90^\circ-\angle ACB$.

又因为 B、C、B_1、C_1 四点共圆，所以，

$\angle AHC_1=\angle AB_1C_1=\angle ABC$.

故 $\angle AHO=\angle OHC_1+\angle AHC_1$

$=90^\circ-\angle ACB+\angle ABC$.

由 $\angle OAB=\angle CAH=90^\circ-\angle ACB$，知

$\angle OAH=\angle BAC-\angle OAB-\angle CAH$

$=\angle BAC-2(90^\circ-\angle ACB)$

$=\angle ACB-\angle ABC$.

则 $\angle AHO+\angle OAH=90^\circ$.

从而，$\angle AOH=90^\circ$.

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R. 则

$AH=2R\cos A$.

由 $AO=AH\cos\angle OAH$，知

$R=2R\cos A\cdot\cos(C-B)$

$\Rightarrow 2\cos A\cdot\cos(C-B)=1$

$\Rightarrow \cos(A+C-B)+\cos(A-C+B)=1$

$\Rightarrow \cos 2B+\cos 2C+1=0$.

2. 令 $f_n=\dfrac{x_1x_2}{x_3}+\dfrac{x_2x_3}{x_4}+\cdots+\dfrac{x_{n-2}x_{n-1}}{x_n}+\dfrac{x_{n-1}x_n}{x_1}+\dfrac{x_nx_1}{x_2}-x_1-x_2-\cdots-x_n$.

下面用数学归纳法证明 $f_n\geqslant0$.

当 $n=3$ 时，

$$f_3=\frac{x_1x_2}{x_3}+\frac{x_2x_3}{x_1}+\frac{x_3x_1}{x_2}-x_1-x_2-x_3$$

$$=\left(\frac{x_1x_2}{2x_3}+\frac{x_2x_3}{2x_1}\right)+\left(\frac{x_1x_2}{2x_3}+\frac{x_3x_1}{2x_2}\right)+\left(\frac{x_3x_1}{2x_2}+\frac{x_2x_3}{2x_1}\right)-x_1-x_2-x_3$$

$$=\frac{x_2}{2}\left(\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}-2\right)+\frac{x_1}{2}\left(\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_2}-2\right)+\frac{x_3}{2}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}-2\right)$$

$$\geqslant0,$$

当且仅当 $x_1=x_2=x_3$ 时，等号成立.

假设 $n=k$ 时成立，即

$$f_k=\frac{x_1x_2}{x_3}+\frac{x_2x_3}{x_4}+\cdots+\frac{x_kx_1}{x_2}-x_1-x_2-\cdots-x_k\geqslant0.$$

当 $n=k+1$ 时，

$$f_{k+1}=\frac{x_1x_2}{x_3}+\frac{x_2x_3}{x_4}+\cdots+\frac{x_{k+1}x_1}{x_2}-x_1-x_2-\cdots-x_{k+1}$$

$$=f_k+\frac{x_{k-1}x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_kx_{k+1}}{x_1}+\frac{x_{k+1}x_1}{x_2}-\frac{x_{k-1}x_k}{x_1}-\frac{x_kx_1}{x_2}-x_{k+1}$$

$$=f_k+x_{k-1}x_k\left(\frac{1}{x_{k+1}}-\frac{1}{x_1}\right)+x_{k+1}\left(\frac{x_k}{x_1}-1\right)+\frac{x_1}{x_2}(x_{k+1}-x_k)$$

$$\geqslant f_k+x_k^2\left(\frac{1}{x_{k+1}}-\frac{1}{x_1}\right)+x_{k+1}\left(\frac{x_k}{x_1}-1\right)+\frac{x_1}{x_k}(x_{k+1}-x_k)$$

$$=f_k+(x_{k+1}-x_k)\left(\frac{x_1}{x_k}+\frac{x_k}{x_1}-\frac{x_k+x_{k+1}}{x_{k+1}}\right)$$

$$\geqslant0,$$

当且仅当 $x_{k+1}-x_k=0$ 或 $\dfrac{x_1}{x_k}+\dfrac{x_k}{x_1}-\dfrac{x_k+x_{k+1}}{x_{k+1}}=0$，且 $f_k=0$ 时，等号成立，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

3. 先证明一个引理.

引理　记 $f(n)$ 为闭区间 $[2,n+1]$ 上的素数个数. 则对任意的 $0\leqslant k\leqslant f(n)$，存在连

续 n 个正整数,其中恰有 k 个素数.

证明　记 $F(n,l)$ 为闭区间 $[l,n+l-1]$ 上的素数个数.

当 l、$n+l$ 均为素数或均不为素数时,

$F(n,l+1)=F(n,l)$;

当 l 为素数且 $n+l$ 不为素数时,

$F(n,l+1)=F(n,l)-1$;

当 l 不为素数且 $n+l$ 为素数时,

$F(n,l+1)=F(n,l)+1$.

故 $F(n,l)$ 关于正整数 l 在 $\mathbf{N}$ 内连续变化.

显然,$F(n,2)=f(n)$,

$F(n,(n+1)!+2)=0$.

因此,对任意的 $0\leqslant k\leqslant f(n)$,存在 $j\in\mathbf{Z}_+$,使得 $F(n,j)=k$.

引理得证.

注意到,$2\,014=2\times19\times53$, $f(2\,014)>100$.

于是,存在 a、b、$c\in\mathbf{Z}_+$,使得

$F(2\,014,a)=2$,

此时,$\left(a-\frac{1}{2},a+2\,013\frac{1}{2}\right)$的内部恰有 2 个素数,

$F(2\,014,b)=19$,

此时,$\left(b-\frac{1}{2},b+2\,013\frac{1}{2}\right)$的内部恰有 19 个素数,

$F(2\,014,c)=53$,

此时,$\left(c-\frac{1}{2},c+2\,013\frac{1}{2}\right)$的内部恰有 53 个素数.

因此,边长为 2 014 的立方体

$$\left[a-\frac{1}{2},a+2\,013\frac{1}{2}\right]\times\left[b-\frac{1}{2},b+2\,013\frac{1}{2}\right]\times\left[c-\frac{1}{2},c+2\,013\frac{1}{2}\right]$$

的内部恰有 $2\times19\times53=2\,014$ 个素点.

4. 将 n 个点记为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. 设激光行进的路径为 $a_1,a_2,\cdots$,其中,$a_i\in\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$.

考虑相邻两点所组成的集合

$\{(a_i,a_{i+1})\mid i=1,2,\cdots\}$,

其为无限集,但其取值至多有 $n(n-1)$ 个.

故必有 $(a_i,a_{i+1})=(a_j,a_{j+1})(i<j)$.

因此,$a_{i+2}=a_{j+2}$.

依此类推,则路径从 a_i 开始循环,且由激光行进方式,知 $(a_i,a_{i+1})=(a_j,a_{j+1})$ 可导出 $a_{i-1}=a_{j-1}$. 依此类推,知该路径从 a_1 开始循环,即激光行进的路径组成有向回路.

线段 $A_1A_i(i=2,3,\cdots,n)$ 与半径充分小的 $\odot A_1$ 的交点(逆时针)依次记为 $A_{11},A_{12},\cdots,A_{1(n-1)}$.

类似定义 $A_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n-1)$.

记 $\angle A_{ij}A_iA_{i(j+1)}=\alpha_{ij}$,其中,$i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,n-1$, $A_{in}=A_{i1}$.

则 $\sum\limits_{j=1}^{n-1}\alpha_{ij}=2\pi$.

若激光从点 A_{ij} 到 A_i,则下一步必在 A_i 逆时针旋转 α_{ij} 角度,从点 A_i 到 $A_{i(j+1)}$,此步骤可逆(即若激光从点 A_i 到 $A_{i(j+1)}$,则上一步必从点 A_{ij} 到 A_i). 故每条路径可由其中一步 (a_i,a_{i+1}) 推导得到.

从而,不同的环路所包含的 $\angle A_{ij}A_iA_{i(j+1)}$ 不会相同,即每个 α_{ij} 至多在一个路径中出现. 故不同的有向环路有有限个,记为 $P_t(t=1,2,\cdots,\mu)$.

对任意一条环路 P_t,激光行进一周后,其仍为原方向.

故 $\sum\limits_{\alpha_{ij}\in P_t}\alpha_{ij}=k_t\pi(k_t\in\mathbf{Z}_+,t=1,2,\cdots,\mu)$.

从而,$\sum\limits_{t=1}^{\mu}k_t\pi\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\alpha_{ij}=2n\pi$.

故 $\mu\leqslant2n$.

5. 设 EF 与 BC 交于点 H.

对直线 GCQ 和 $\triangle HED$,应用梅涅劳斯定

理得

$$\frac{HG}{GE}\cdot\frac{EQ}{QD}\cdot\frac{DC}{CH}=1. \quad ①$$

对直线 PBF 和 $\triangle HED$,应用梅涅劳斯定理得

$$\frac{HF}{FE}\cdot\frac{EP}{PD}\cdot\frac{DB}{BH}=1. \quad ②$$

①×②得

$$\frac{HG}{GE}\cdot\frac{EQ}{QD}\cdot\frac{DC}{CH}\cdot\frac{HF}{FE}\cdot\frac{EP}{PD}\cdot\frac{DB}{BH}=1. \quad ③$$

由相交弦定理和切割线定理得

$HB\cdot HC=HF\cdot HG$,

$EG\cdot EF=EA^2$,

$DB\cdot DC=DA^2$.

代入式③得 $\frac{DA^2}{EA^2}\cdot\frac{EQ}{QD}\cdot\frac{EP}{PD}=1$.

故 $AD^2(AQ+AE)(AP-AE)$

$=AE^2(AQ-AD)(AP+AD)$.

整理得

$(AD+AE)[AP\cdot AQ(AD-AE)+$

$AD\cdot AE(AP-AQ)]=0$

$\Rightarrow AP\cdot AQ(AD-AE)=AD\cdot AE(AQ-AP)$.

因此,$AD=AE$ 的充分必要条件为 $AP=AQ$.

【注】本题的背景是广义蝴蝶定理:当 $\odot O$ 的弦退化为一点 A 时,弦所在的直线就是过点 A 的切线 l. 若 D、E 为 l 上的两个点,且 $AD=AE$,过 D、E 分别作 $\odot O$ 的割线 DCB、EGF,直线 FB、GC 与 l 分别交于点 P、Q,则 $AP=AQ$. 反之亦然.

6. 不等式左边

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$

$=\frac{(x+y+z)((x-z)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)}{2}$.

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0$.

若 $x=y$ 或 $y=z$,对于任意实数 c,不等式均成立.

若 $x>y>z\geqslant 0$,固定 $x-y$、$y-z$,则 $z-x$ 固定.

要使得 c 最大,应使左边最小,即 $x+y+z$ 最小.

因为 $x+y+z=(x-y)+2(y-z)+3z$,所以,当 $z=0$ 时,左边最小.

下面讨论 $x>y>z=0$ 的情形.

原式变为 $x^3+y^3\geqslant cxy(x-y)$.

令 $t=\frac{x}{y}(t>1)$. 则 $t^3+1\geqslant ct(t-1)$.

故 $c_{\max}=f(t)_{\min}$,其中,$f(t)=\frac{t^3+1}{t(t-1)}$.

设 $f(t)$ 在 t_0 处取得最小值. 则

$$f'(t_0)=\frac{t_0^4-2t_0^3-2t_0+1}{t_0^2(t_0-1)^2}=0.$$

故 $\left(t_0+\frac{1}{t_0}\right)^2-2\left(t_0+\frac{1}{t_0}\right)-2=0$.

解得 $t_0=\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$.

从而,$c_{\max}=f(t_0)=\left(\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt[4]{3}$.

7. 记 n 被 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 除所得的余数为 $r_k(n)$.

于是,$r_k(n)=n-k\left[\frac{n}{k}\right]$,其中,$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

则 $r(m)=\sum_{k=1}^{m}r_k(m)$

$=\sum_{k=1}^{m}\left(m-k\left[\frac{m}{k}\right]\right)=m^2-\sum_{k=1}^{m}k\left[\frac{m}{k}\right]$.

故 $r(m)=r(m-1)$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m}k\left[\frac{m}{k}\right]-\sum_{k=1}^{m-1}k\left[\frac{m-1}{k}\right]=2m-1$

$\Leftrightarrow m+\sum_{k=1}^{m-1}k\left(\left[\frac{m}{k}\right]-\left[\frac{m-1}{k}\right]\right)=2m-1$

$\Leftrightarrow m+\sum_{\substack{k\mid m\\1\leqslant k\leqslant m-1}}k=2m-1$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{k\mid m\\1\leqslant k\leqslant m}}k=2m-1. \quad ①$$

式①左边就是 m 的所有正约数之和 $\sigma(m)$.

设$m=\prod_{i=1}^{t} p_i^{\alpha_i}$(素数$p_1<p_2<\cdots<p_t$,$\alpha_i\in\mathbf{Z}_+$).

故 $\sigma(m)=\prod_{i=1}^{t}(1+p_i+\cdots+p_i^{\alpha_i})$

$=2m-1$. ②

若 m 的奇素因子 p_i 的指数 α_i 为奇数,则 $1+p_i+\cdots+p_i^{\alpha_i}$ 为偶数,与式②矛盾.

因此,m 中奇素因子的指数必为偶数,即 $m=2^s a^2$($s\in\mathbf{N}$,a 为正奇数).

显然,$m=2^s$($s\in\mathbf{N}$)满足式①.

下设 $a>1$,由 $1<m\leqslant 2\,014$,得

$m\in\{p^{2\alpha},2^{\alpha}p^{2\beta}\mid p$ 为奇素数$\}\cup B$,

其中,$B=\{3^2\times5^2,3^2\times7^2,3^2\times11^2,3^2\times13^2,5^2\times7^2,2\times3^2\times5^2,2^2\times3^2\times5^2,2\times3^2\times7^2,2^2\times3^2\times7^2\}$.

若 $m=p^{2\alpha}$,则

式② $\Leftrightarrow \dfrac{p^{2\alpha+1}-1}{p-1}=2p^{2\alpha}-1$

$\Leftrightarrow p^{2\alpha+1}-2p^{2\alpha}-p+2=0$

$\Leftrightarrow (p-2)(p^{2\alpha}-1)=0$

$\Leftrightarrow p=2$ 或 1,

矛盾.

若 $m=2^{\alpha}p^{2\beta}$,则

式② $\Leftrightarrow (2^{\alpha+1}-1)\dfrac{p^{2\beta+1}-1}{p-1}=2^{\alpha+1}p^{2\beta}-1$

$\Leftrightarrow p^{2\beta+1}-2^{\alpha+1}p^{2\beta}+2^{\alpha+1}-p=0$

$\Leftrightarrow (p-2^{\alpha+1})(p^{2\beta}-1)=0$

$\Leftrightarrow p=2^{\alpha+1}$或 1,

矛盾.

若 $m\in B$,经检验,均不满足式②.

综上,所求 $m=2^s$($s\in\mathbf{Z}_+$,$s\leqslant10$).

8. 记初始状态恰有 i($i=1,2,\cdots,n$)个球的盒子编号为 i,且某步操作后该盒子中球数为 x_i.

当 $n=3l$ 时,将 n 个盒子根据编号分成三组:

$\{1,4,\cdots,3l-2\}$,$\{2,5,\cdots,3l-1\}$,$\{3,6,\cdots,3l\}$.

显然,每次操作恰涉及各组中一个盒子.

记三组盒子中球数总和依次为 X、Y、Z.

显然,每次操作均使得 X、Y、Z 要么同时增加 1,要么同时减少 1.

在初始状态 $X<Y<Z$,操作过程中始终保持 $X<Y<Z$,因此,对任意的正整数 k,均不可能经过有限次操作,使得 $n=3l$ 个盒子中均恰有 k 个球,即满足题意的正整数 k 不存在.

在初始状态 n 个盒子中球数总和为

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,

每次操作球数总和要么增加 3,要么减少 3,在模 3 的意义下球数总和不变.

当 $n=3l+1$ 时,符合题意的正整数 k 必满足

$\dfrac{(3l+1)(3l+2)}{2}\equiv(3l+1)k\pmod 3$

$\Leftrightarrow k\equiv1\pmod 3$.

当 $n=3l+2$ 时,符合题意的正整数 k 必满足

$\dfrac{(3l+2)(3l+3)}{2}\equiv(3l+2)k\pmod 3$

$\Leftrightarrow k\equiv0\pmod 3$.

下面证明:

(i)当 $k\equiv1\pmod 3$时,可经过有限次操作,使得 $n=3l+1$ 个盒子中均恰有 k 个球.

(ii)当 $k\equiv0\pmod 3$时,可经过有限次操作,使得 $n=3l+2$ 个盒子中均恰有 k 个球.

事实上,从某盒子开始按逆时针方向依次 1 个盒子放入(取出)1 个球,连续放入(取出)$3n$ 个球相当于 n 次操作,其结果为每个盒子均恰放入(取出)了 3 个球,因此,只需构造有限次操作,使得 n 个盒子中的球数相同.

(i)选择一个球数最多的盒子,在其他盒子中各放入 1 个球(相当于 l 次操作),相对而言其结果类似于从球数最多的那个盒子中

取走 1 个球,因此,可经过有限次操作,使得 $n=3l+1$ 个盒子中的球数相同.

(ii)选择一个球数最少的盒子,从它开始按逆时针方向依次 1 个盒子放入 1 个球,连续放入 $3l+3$ 个球(相当于 $l+1$ 次操作),其结果为那个盒子放入了 2 个球,其他盒子均恰放入 1 个球,相对而言其结果类似于从球数最少的那个盒子中放入 1 个球,因此,可经过有限次操作,使得 $n=3l+2$ 个盒子中的球数相同.