



秘密★启用前

数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚。
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。在试题卷上作答无效。
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。满分150分，考试用时120分钟。

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{2x+2}{x-3} \leq 0 \right\}$, $B = \{ y \in \mathbf{Z} \mid y = 2^x \}$, 则 $A \cap B =$
 A. $[-1, 3]$ B. $(0, 3]$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2\}$
2. $(2+i) \cdot z = i^3$, 则 z 的虚部为
 A. $\frac{2}{5}i$ B. $-\frac{2}{5}i$ C. $\frac{2}{5}$ D. $-\frac{2}{5}$
3. 《易经》中的“太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦”充分体现了中国古典哲学与现代数学的关系，从直角坐标系中的原点，到数轴中的两个半轴（正半轴和负半轴），进而到平面直角坐标系中的四个象限和空间直角坐标系中的八个卦限，是由简单到繁复的变化过程。现将平面向量的运算推广到 $n(n \geq 3)$ 维向量，用有序数组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示 $n(n \geq 3)$ 维向量，已知 n 维向量 $\vec{a} = (-1, 1, 1, \dots, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 1, \dots, 1)$, 则
 A. $|\vec{a} + \vec{b}| = n-1$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = n-1$
 C. $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{n-2}{n}$ D. 存在 $\lambda \in \mathbf{R}$ 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$
4. “ $\sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$ ” 是 “ $\sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{7}{9}$ ” 的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 《红楼梦》四十一回中，凤姐为刘姥姥准备了一道名为“茄鲞”的佳肴，这道菜用到了鸡肉、鸡脯肉、香菇、新笋、豆腐干、果干、茄子净肉七种原料，烹饪时要求香菇、新笋、豆腐干一起下锅，茄子净肉在鸡脯肉后下锅，鸡汤最后下锅，则烹饪“茄鲞”时不同的下锅顺序共有
 A. 6种 B. 12种 C. 36种 D. 72种
6. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=3$, $AD=AA_1=\sqrt{3}$, E 为线段 AB 的三等分点（靠近点 B ），若三棱锥 D_1-DCE 的顶点都在同一球面上，则该球的表面积为
 A. $\frac{37\pi}{3}$ B. $\frac{74\pi}{3}$ C. 30π D. 60π



维护权益 严禁提前考试 第一举报者重奖 1000 元 电话: (0) 18987573845

7. 数列 $\{F_n\}$ 满足 $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 现求得 $\{F_n\}$ 的通项公式为 $F_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $A, B \in \mathbf{R}$, 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8\right]$ 的值为
- A. 43 B. 44 C. 45 D. 46

8. 设 $a = 2\ln \frac{8}{5}$, $b = \frac{19}{20}$, $c = \tan \frac{4}{5}$, 则

- A. $c > a > b$ B. $c > b > a$
C. $b > c > a$ D. $a > c > b$

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 已知 $f(x) = \sin 2x + m \cos 2x$ ($m \in \mathbf{R}$) 在 $x = -\frac{\pi}{3}$ 处取得最小值, 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{7\pi}{12}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x)$

- A. 是奇函数 B. 是偶函数
C. 关于直线 $x = -\frac{\pi}{4}$ 对称 D. 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调

10. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $2a + b = 1$, 则下列不等式一定成立的有

- A. $ab \leq \frac{1}{8}$ B. $a + b > \frac{1}{2}$
C. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{4}$ D. $\frac{4}{a+1} + \frac{1}{b} \geq 3 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$

11. 如图 1 甲, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = 1$, E 为 AB 上一动点 (不含端点), 且满足将 $\triangle AED$ 沿 DE 折起后, 点 A 在平面 $DCBE$ 上的射影 F 总在棱 DC 上, 如图乙, 则下列说法正确的有

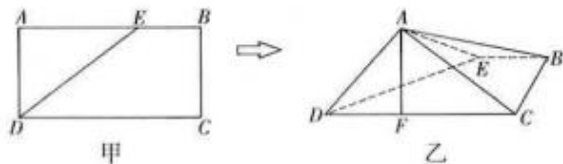


图 1

- A. 翻折后总有 $BC \perp AD$
B. 当 $EB = \frac{1}{2}$ 时, 翻折后异面直线 AE 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{1}{3}$
C. 当 $EB = \frac{1}{2}$ 时, 翻折后四棱锥 $A-DCBE$ 的体积为 $\frac{5\sqrt{5}}{36}$
D. 在点 E 运动的过程中, 点 F 运动的轨迹长度为 $\frac{1}{2}$
12. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 $A(1, 2)$, B, C 为抛物线上不与 A 重合的动点, O 为坐标原点, 则下列说法中, 正确的有
- A. 若 BC 中点纵坐标为 2, 则 BC 的斜率为 2
B. 若点 F 恰为 $\triangle OBC$ 的垂心, 则 $\triangle OBC$ 的周长为 $10\sqrt{5}$
C. 若 AC 与 AB 的倾斜角互补, 则 BC 的斜率恒为 $-\frac{1}{2}$
D. 若 $AC \perp BC$, 则 B 点纵坐标的取值范围是 $(-\infty, -6) \cup [10, +\infty)$



三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 随机变量 X 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$ ，若 $P(X < 3) = P(a < X \leq 2) + \frac{1}{2}$ ，则实数 $a =$ _____.

14. 已知 $k \in \mathbf{R}$ ，直线 $y = kx$ 与曲线 $y = e^{|x|} + |x|$ 相切，则 $k =$ _____.

15. 已知 A, B 为圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上的两个动点， $|AB| = 2\sqrt{3}$ ， M 是 AB 的中点，则点 M 的轨迹方程是 _____；若点 P 为直线 $x + y - 4\sqrt{2} = 0$ 上一动点，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的最小值为 _____。（第一空2分，第二空3分）

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B ，右焦点为 F ， P 为椭圆上一点，直线 AP 与直线 $x = a$ 交于点 M ， $\angle PFB$ 的角平分线与直线 $x = a$ 交于点 N ，若 $PF \perp AB$ ， $\triangle MAB$ 的面积是 $\triangle NFB$ 面积的6倍，则椭圆 C 的离心率是 _____.

四、解答题（共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. （本小题满分10分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1$ ， $(n-1)S_n = 2nS_{n-1} (n \geq 2)$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = \frac{4^n}{a_n a_{n+1}}$ ，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. （本小题满分12分）

如图2，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形， E 是 A_1D_1 的中点， F 为线段 BC 上一点， $AB = 2$ ， $AA_1 = 1$ ， $\angle BAD = 60^\circ$.

(1) 证明：当 $BF = FC$ 时， $AE \perp$ 平面 DEF ；

(2) 是否存在点 F ，使二面角 $A-DE-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{5}$ ？若存在，请指出点 F 的位置；若不存在，请说明理由.

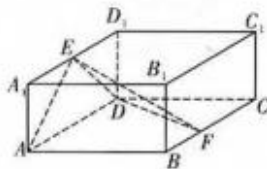


图2

19. （本小题满分12分）

某商场计划在国庆节开展促销活动，准备了游戏环节，主持人准备一枚质地均匀的骰子，掷到奇数和偶数的概率各为 $\frac{1}{2}$ ，游戏要求顾客掷 $2n (n \in \mathbf{N}^*)$ 次骰子，每次记录下点数为奇数还是偶数.

(1) 若正好有 n 次的点数为偶数，则顾客获得一个价值50元的红包. 作为顾客，你认为 $n=1$ 和 $n=2$ 哪种情况更有利于你获得红包？

(2) 投掷 $2n$ 次骰子后，若掷出偶数的次数多于奇数，则顾客获得一张100元的消费券；掷出偶数的次数等于奇数，则顾客获得一张50元的消费券；掷出偶数的次数少于奇数，则顾客获得一张10元的消费券.

(i) 当 $n=2$ 时，记顾客获得的消费券为 X 元，求随机变量 X 的数学期望；

(ii) 记“掷 $2n$ 次骰子，掷出偶数的次数多于奇数”的概率为 P_n ，求 P_n .（直接写出 P_n 表达式即可）

维护权益 严禁提前考试 第一举报者重奖 1000 元 电话: (0) 18987573845

20. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 设角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , BC 边上的高为 h , 且 $b+c=a+h$.

(1) 若 $h=\frac{2}{3}a$, 且 $k\sin A - \cos A = 1$, 求实数 k 的值;

(2) 求 $\tan A$ 的最小值.

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的右焦点为 F , C 的两条渐近线分别与直线 $x=\frac{a^2}{c}$ 交于

A, B 两点, 且 AB 的长度恰好等于点 F 到渐近线距离的 $\sqrt{3}$ 倍.

(1) 求双曲线的离心率;

(2) 已知过点 F 且斜率为 1 的直线 l 与双曲线交于 M, N 两点, O 为坐标原点, 若对于双曲线上任意一点 P , 均存在实数 λ, μ , 使得 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OM} + \mu \overrightarrow{ON}$, 试确定 λ, μ 的等量关系式.

22. (本小题满分 12 分)

设 $m \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = e^{-x}(x^2 + m)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 是否存在正整数 m 满足以下两个条件:

①关于 x 的方程 $f(x) = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上无解;

②对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $2f(\ln \sqrt{x_1 x_2}) \leq f(\ln x_1) + f(\ln x_2)$ 恒成立.

若存在, 求 m 的最小值; 若不存在, 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线